Actuariat IARD - ACT2040
Partie 6 - modélisation des coûts individuels de sinistres ($Y \in \mathbb{R}_+$)

Arthur Charpentier

charpentier.arthur@uqam.ca

http ://freakonometrics.hypotheses.org/

UQÀM
Université du Québec à Montréal

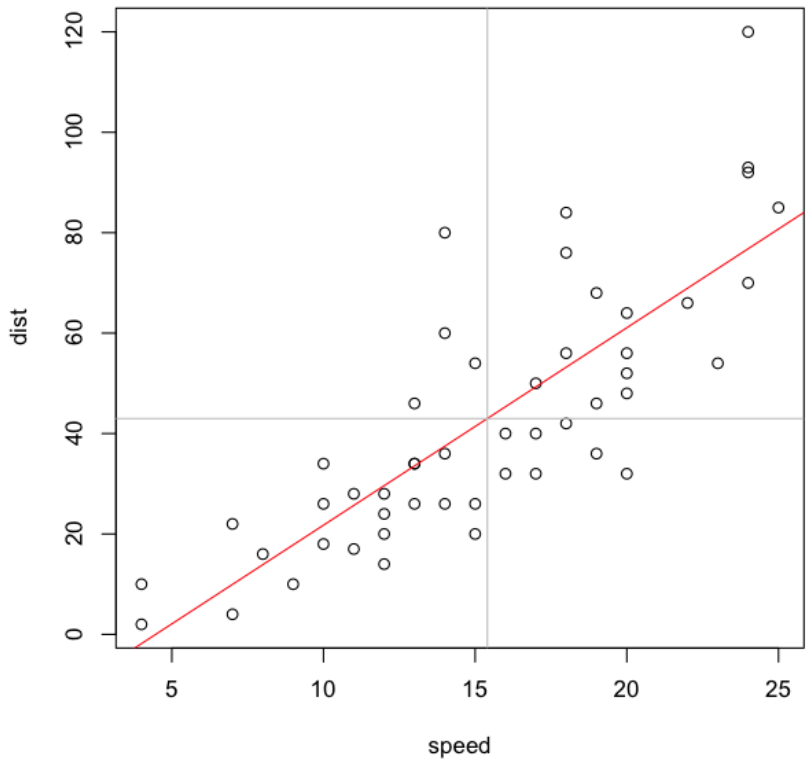
Hiver 2013

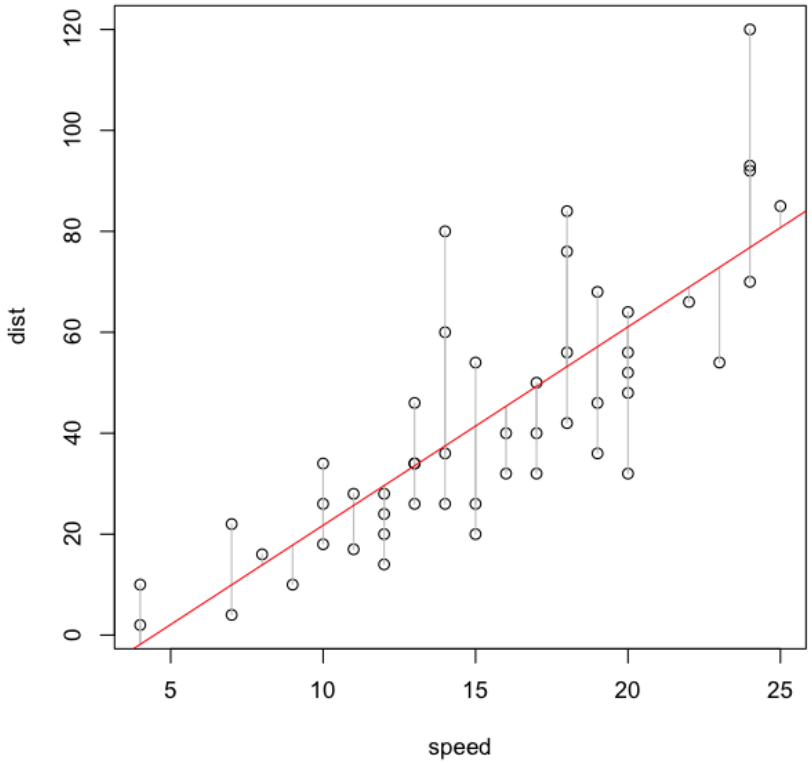
Modélisation de variables positives

Références : Frees (2010), chapitre 13, de Jong & Heller (2008), chapitre 8, et Denuit & Charpentier (2005), chapitre 11.

Préambule : avec le modèle linéaire, nous avions $\sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n} \widehat{Y}_i$

```
> reg=lm(dist~speed,data=cars)
> sum(cars$dist)
[1] 2149
> sum(predict(reg))
[1] 2149
```





C'est lié au fait que $\sum_{i=1}^{n} \widehat{\varepsilon}_i = 0$, i.e. "la droite de régression passe par le barycentre du nuage".

Cette propriété était conservée avec la régression log-Poisson, nous avions que $\sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n} \widehat{\mu}_i E_i$, où $\widehat{\mu}_i E_i$ est la prédiction faite avec l'exposition, au sens où

```
>  sum(sinistres$nbre)
[1] 1924
>  reg=glm(nbre~1+offset(log(exposition)),data=sinistres,
+  family=poisson(link="log"))
> sum(predict(reg,type="response"))
[1] 1924
>  sum(predict(reg,newdata=data.frame(exposition=1),
+  type="response")*sinistres$exposition)
[1] 1924
```

et ce, quel que soit le modèle utilisé !

```
> reg=glm(nbre~offset(log(exposition))+ageconducteur+
+ zone+carburant,data=sinistres,family=poisson(link="log"))
>  sum(predict(reg,type="response"))
[1] 1924
```

... mais c'est tout. En particulier, cette propriété n'est pas vérifiée si on change de fonction lien,

```
>  reg=glm(nbre~1+log(exposition),data=sinistres,
>  sum(predict(reg,type="response"))
[1] 1977.704
```

ou de loi (e.g. binomiale négative),

```
> reg=glm.nb(nbre~1+log(exposition),data=sinistres)
>  sum(predict(reg,type="response"))
[1] 1925.053
```

Conclusion : de manière générale $\sum_{i=1}^{n} Y_i \neq \sum_{i=1}^{n} \widehat{Y}_i$

La base des coûts individuels

```
>  sinistre=read.table("http://freakonometrics.free.fr/sinistreACT2040.txt",
+  header=TRUE,sep=";")
>  sinistres=sinistre[sinistre$garantie=="1RC",]
>  sinistres=sinistres[sinistres$cout>0,]
>  contrat=read.table("http://freakonometrics.free.fr/contractACT2040.txt",
+  header=TRUE,sep=";")
> couts=merge(sinistres,contrat)
> tail(couts,4)
     nocontrat    no garantie   cout exposition zone puissance agevehicule
1921   6108364 13229      1RC 1320.0       0.74    B         9           1
1922   6109171 11567      1RC 1320.0       0.74    B        13           1
1923   6111208 14161      1RC  970.2       0.49    E        10           5
1924   6111650 14476      1RC 1940.4       0.48    E         4           0
     ageconducteur bonus marque carburant densite region
1921            32   100     12         E      83      0
1922            56    50     12         E      93     13
1923            30    90     12         E      53      2
1924            69    50     12         E      93     13
```

La loi Gamma

La densité de Y est ici

$$f(y) = \frac{1}{y\Gamma(\phi^{-1})}\left(\frac{y}{\mu\phi}\right)^{\phi^{-1}} \exp\left(-\frac{y}{\mu\phi}\right), \quad \forall y \in \mathbb{R}_+$$

qui est dans la famille exponentielle, puisque

$$f(y) = \left[\frac{y/\mu - (-\log\mu)}{-\phi} + \frac{1-\phi}{\phi}\log y - \frac{\log\phi}{\phi} - \log\Gamma\left(\phi^{-1}\right)\right], \quad \forall y \in \mathbb{R}_+$$

On en déduit en particulier le lien canonique, $\theta = \mu^{-1}$ (fonction de lien inverse). De plus, $b(\theta) = -\log(\mu)$, de telle sorte que $b'(\theta) = \mu$ et $b''(\theta) = -\mu^2$. La fonction variance est alors ici $V(\mu) = \mu^2$.

Enfin, la déviance est ici

$$D = 2\phi[\log\mathcal{L}(y,y) - \log\mathcal{L}(\mu,y)] = 2\phi\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i-\mu_i}{\mu_i} - \log\left(\frac{y_i}{\mu_i}\right)\right).$$

La loi lognormale

La densité de Y est ici

$$f(y) = y\frac{1}{y\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(\ln y-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \forall y \in \mathbb{R}_+$$

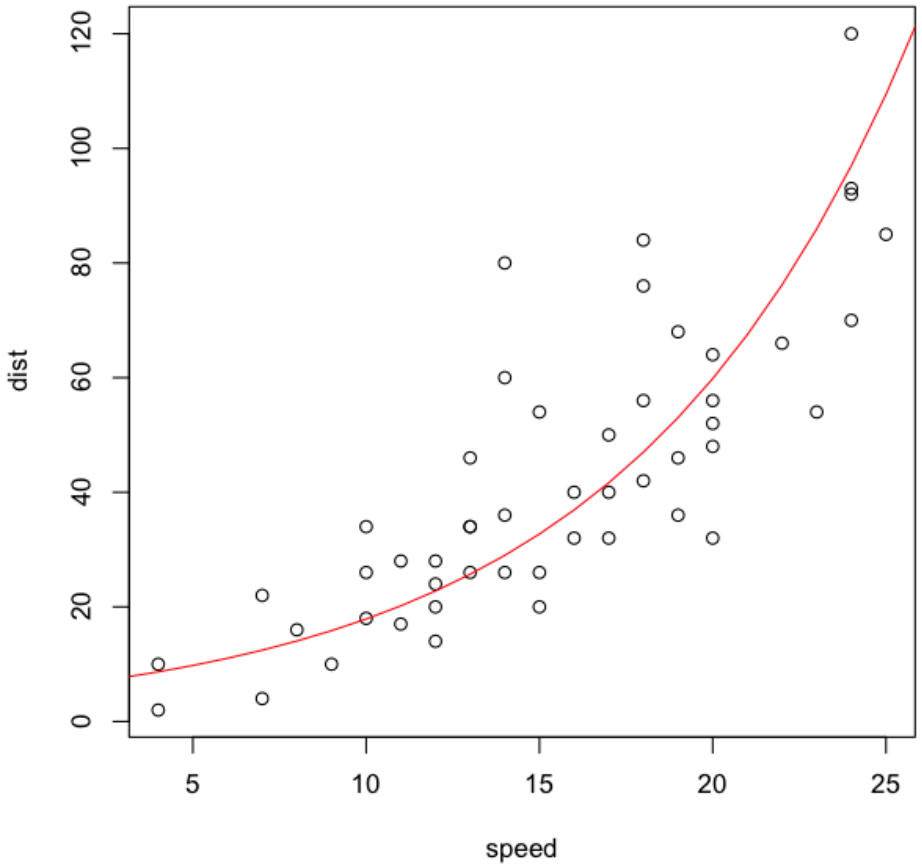
Si Y suit une loi lognormale de paramètres μ et σ^2, alors $Y = \exp[Y^\star]$ où $Y^\star \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. De plus,

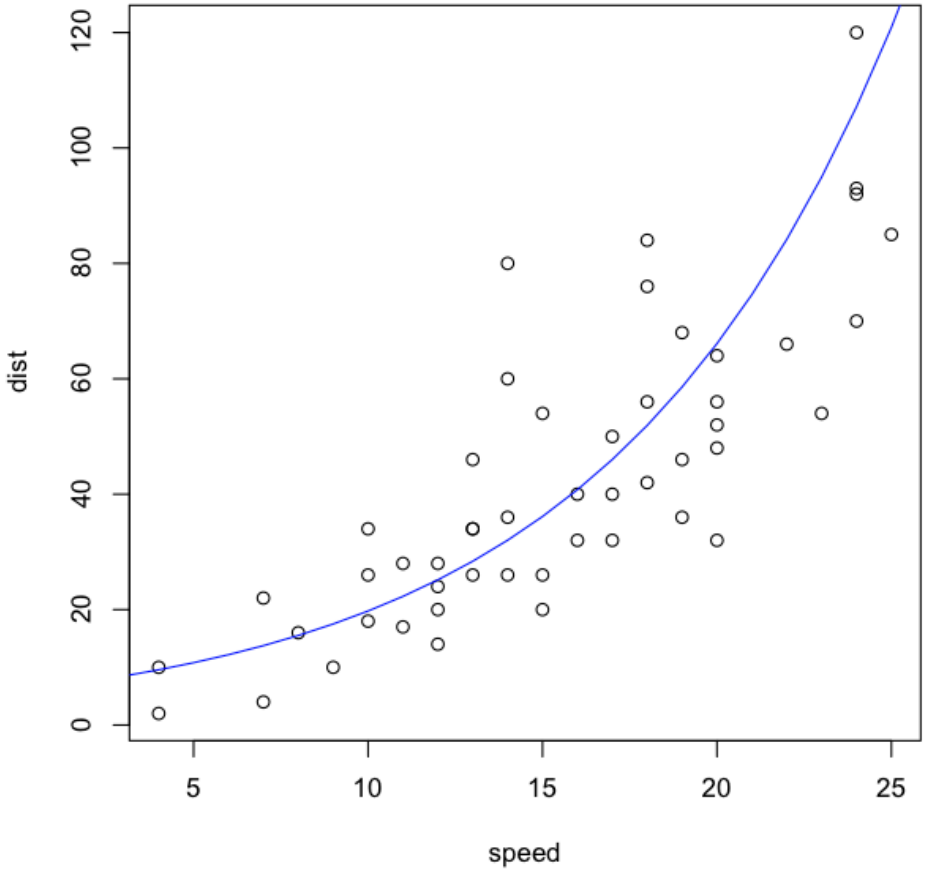
$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\exp[Y^\star]) \neq \exp\left[\mathbb{E}(Y^\star)\right] = \exp(\mu).$$

Rappelons que $\mathbb{E}(Y) = e^{\mu+\sigma^2/2}$, et $\text{Var}(Y) = (e^{\sigma^2}-1)e^{2\mu+\sigma^2}$.

```
> plot(cars)
> regln=lm(log(dist)~speed,data=cars)
> nouveau=data.frame(speed=1:30)
> preddist=exp(predict(regln,newdata=nouveau))
```

```
>  lines(1:30,preddist,col="red")
>  (s=summary(regln)$sigma)
[1] 0.4463305
>  lines(1:30,preddist*exp(.5*s^2),col="blue")
```





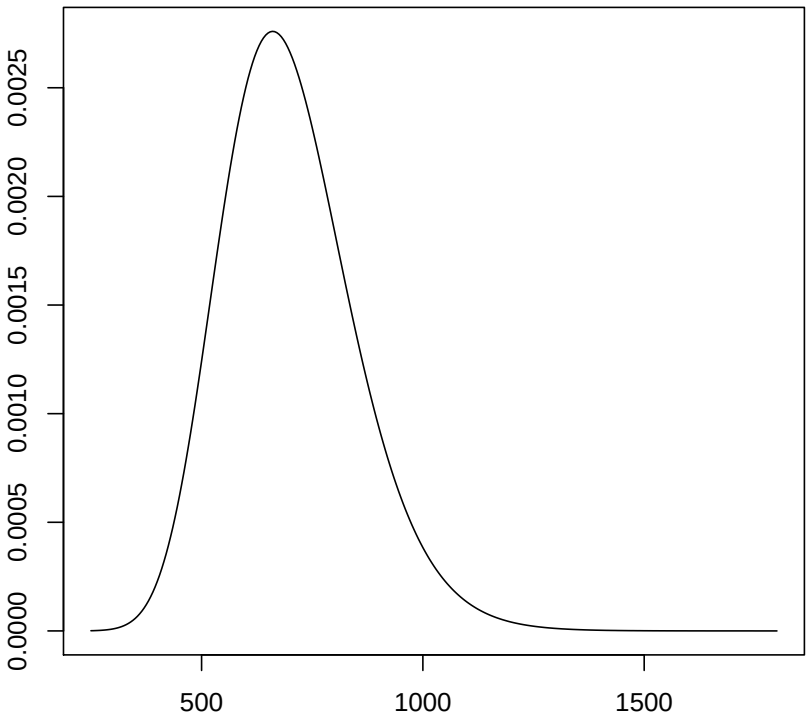
Remarque on n'a pas, pour autant, $\sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n} \widehat{Y}_i = \sum_{i=1}^{n} \exp\left(\widehat{Y}_i^\star + \frac{\sigma^2}{2}\right)$

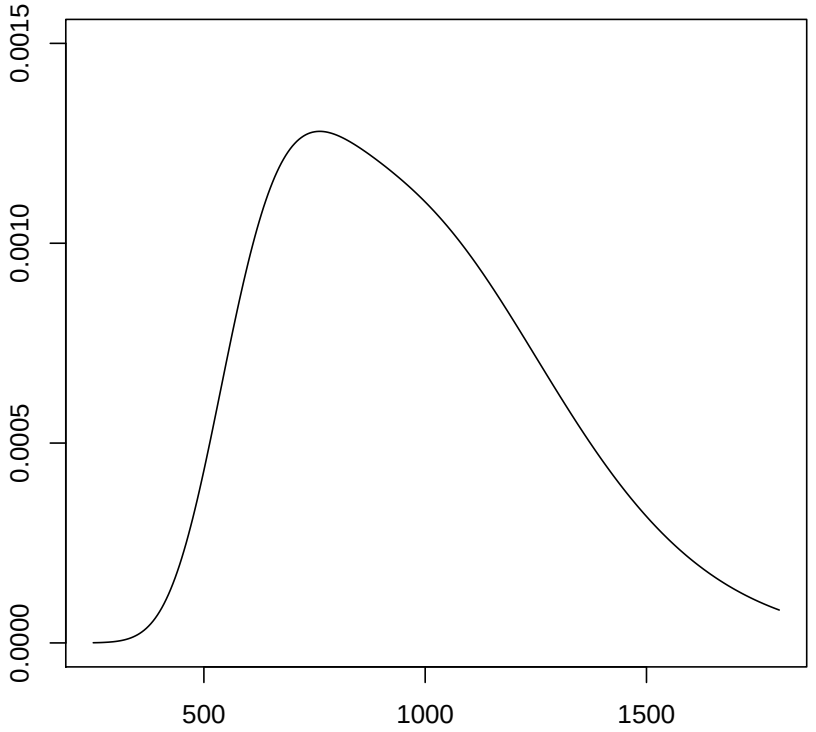
```
>  sum(cars$dist)
[1] 2149
>  sum(exp(predict(regln)))
[1] 2078.34
>  sum(exp(predict(regln))*exp(.5*s^2))
[1] 2296.015
```

même si on ne régresse sur aucune variable explicative...

```
>  regln=lm(log(dist)~1,data=cars)
>  (s=summary(regln)$sigma)
[1] 0.7764719
>  sum(exp(predict(regln))*exp(.5*s^2))
[1] 2320.144
```

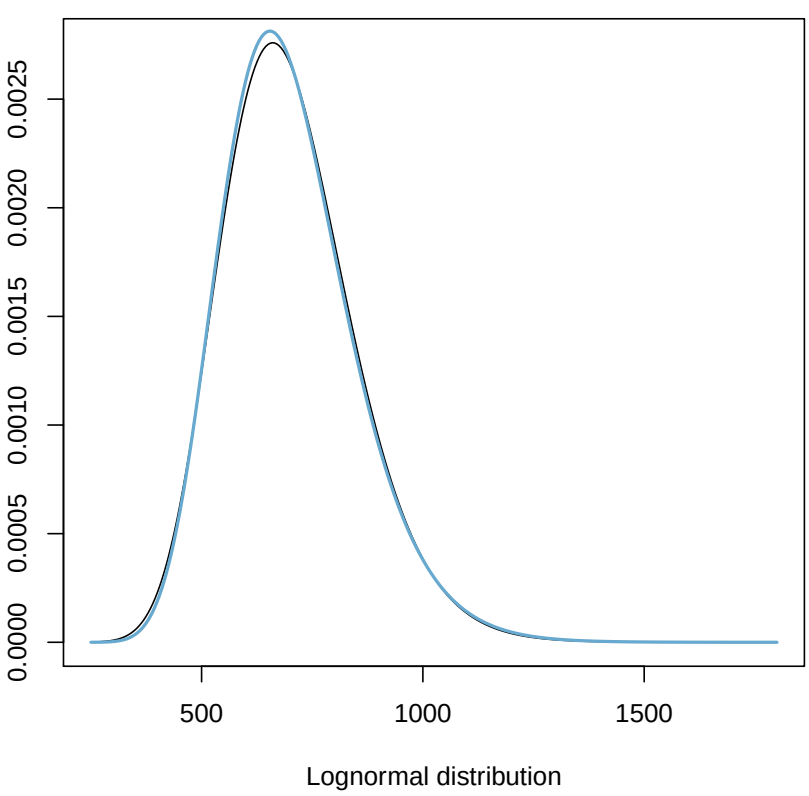
Loi Gamma ou loi lognormale ?

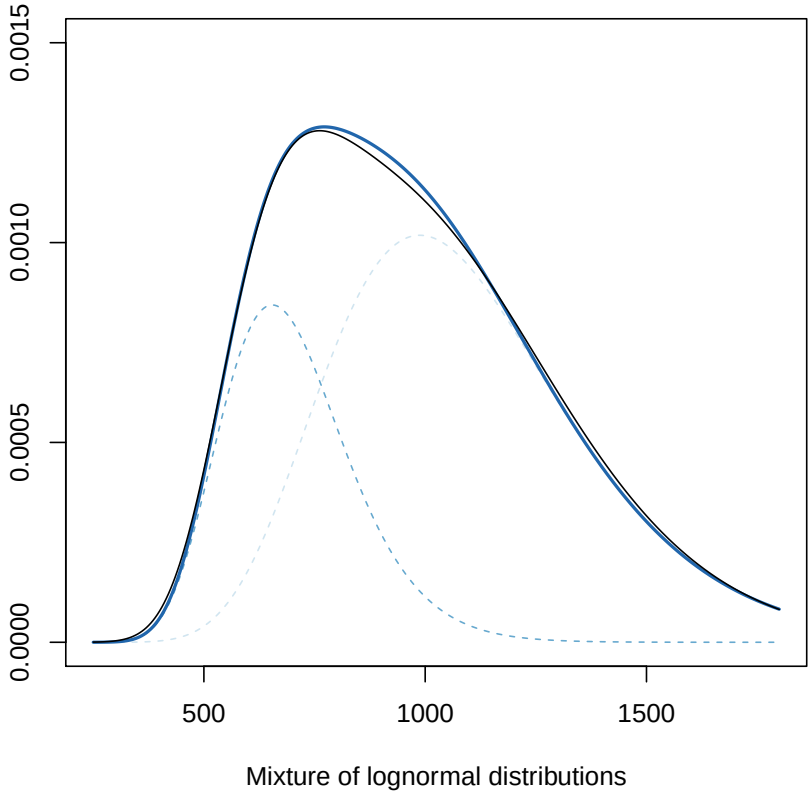




Loi Gamma ou loi lognormale ?

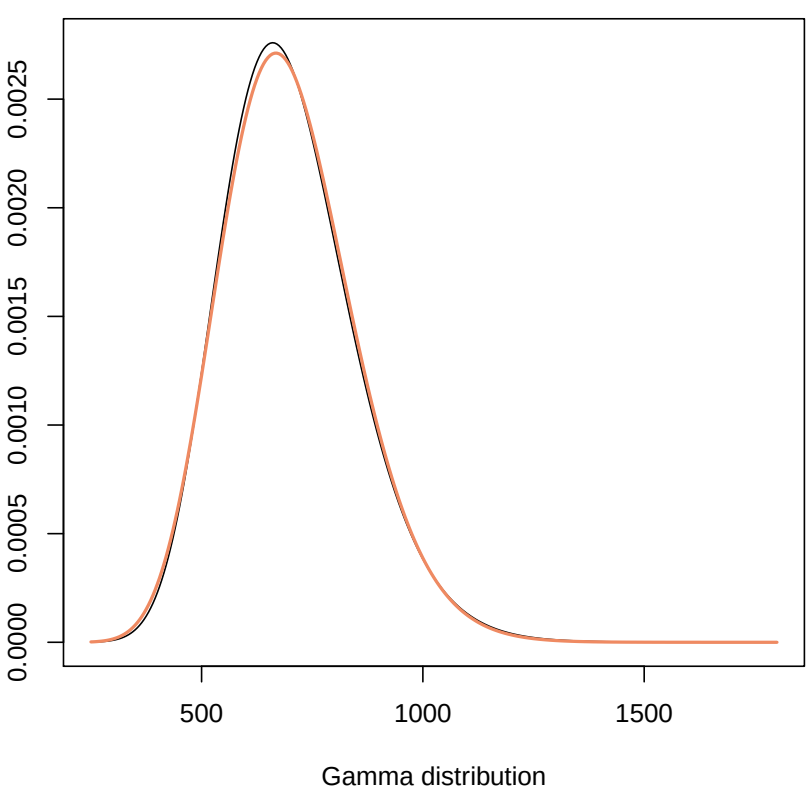
Loi Gamma ? Mélange de deux lois Gamma ?

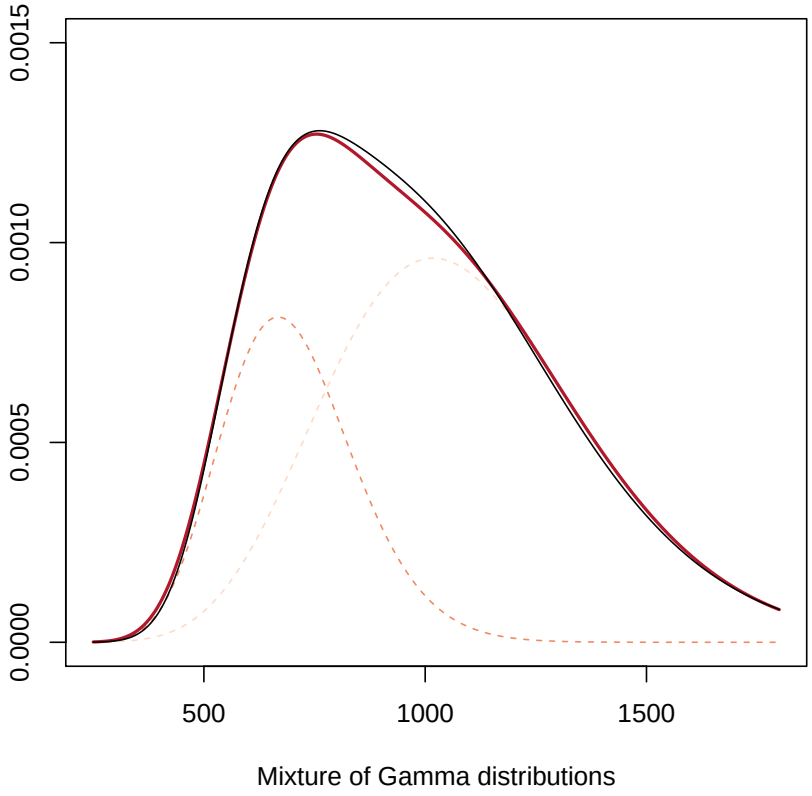




Loi Gamma ou loi lognormale ?

Loi lognormale ? Mélange de deux lois lognormales ?





Autres lois possibles

Plusieurs autres lois sont possibles, comme la loi inverse Gaussienne,

$$f(y) = \left[\frac{\lambda}{2\pi y^3}\right]^{1/2} \exp\left(\frac{-\lambda(y-\mu)^2}{2\mu^2 y}\right), \quad \forall y \in \mathbb{R}_+$$

de moyenne μ (qui est dans la famille exponentielle) ou la loi loi exponentielle

$$f(y) = \lambda \exp(-\lambda y), \quad \forall y \in \mathbb{R}_+$$

de moyenne λ^{-1}.

Les régressions Gamma, lognormale et inverse Gaussienne

Pour la régression Gamma (et un lien log i.e. $\mathbb{E}(Y|\boldsymbol{X}) = \exp[\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\beta}]$), on a

```
> regg=glm(cout~agevehicule+carburant+zone,data=couts,
+      family=Gamma(link="log"))
> summary(regg)
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  8.17615    0.22937  35.646   <2e-16 ***
agevehicule -0.01715    0.01360  -1.261   0.2073
carburantE  -0.20756    0.14725  -1.410   0.1588
zoneB       -0.60169    0.30708  -1.959   0.0502 .
zoneC       -0.60072    0.24201  -2.482   0.0131 *
zoneD       -0.45611    0.24744  -1.843   0.0654 .
zoneE       -0.43725    0.24801  -1.763   0.0781 .
zoneF        0.24778    0.44852   0.552   0.5807
---
Signif. codes:  0 ’***’ 0.001 ’**’ 0.01 ’*’ 0.05 ’.’ 0.1 ’ ’ 1

(Dispersion parameter for Gamma family taken to be 9.91334)
```

Les régressions Gamma, lognormale et inverse Gaussienne

Pour la régression inverse-Gaussienne, (et un lien log i.e. $\mathbb{E}(Y|\boldsymbol{X}) = \exp[\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\beta}]$),

```
> regig=glm(cout~agevehicule+carburant+zone,data=couts,
+       family=inverse.gaussian(link="log"),start=coefficients(regg))
> summary(regig)
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  8.07065    0.23606  34.188   <2e-16 ***
agevehicule -0.01509    0.01118  -1.349   0.1774
carburantE  -0.18037    0.13065  -1.381   0.1676
zoneB       -0.50202    0.28836  -1.741   0.0819 .
zoneC       -0.50913    0.24098  -2.113   0.0348 *
zoneD       -0.38080    0.24806  -1.535   0.1249
zoneE       -0.36541    0.24975  -1.463   0.1436
zoneF        0.42854    0.56537   0.758   0.4486
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

(Dispersion parameter for inverse.gaussian family taken to be 0.004331898)
```

Les régressions Gamma, lognormale et inverse Gaussienne

Pour la régression log-normale i.e. $\mathbb{E}(\log Y|\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{\beta}$, on a

```
> regln=lm(log(cout)~agevehicule+carburant+zone,data=couts)
> summary(regln)
Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  6.876142   0.086483  79.508   <2e-16 ***
agevehicule -0.007032   0.005127  -1.372    0.170
carburantE  -0.042338   0.055520  -0.763    0.446
zoneB        0.080288   0.115784   0.693    0.488
zoneC        0.015060   0.091250   0.165    0.869
zoneD        0.099338   0.093295   1.065    0.287
zoneE        0.004305   0.093512   0.046    0.963
zoneF       -0.101866   0.169111  -0.602    0.547
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

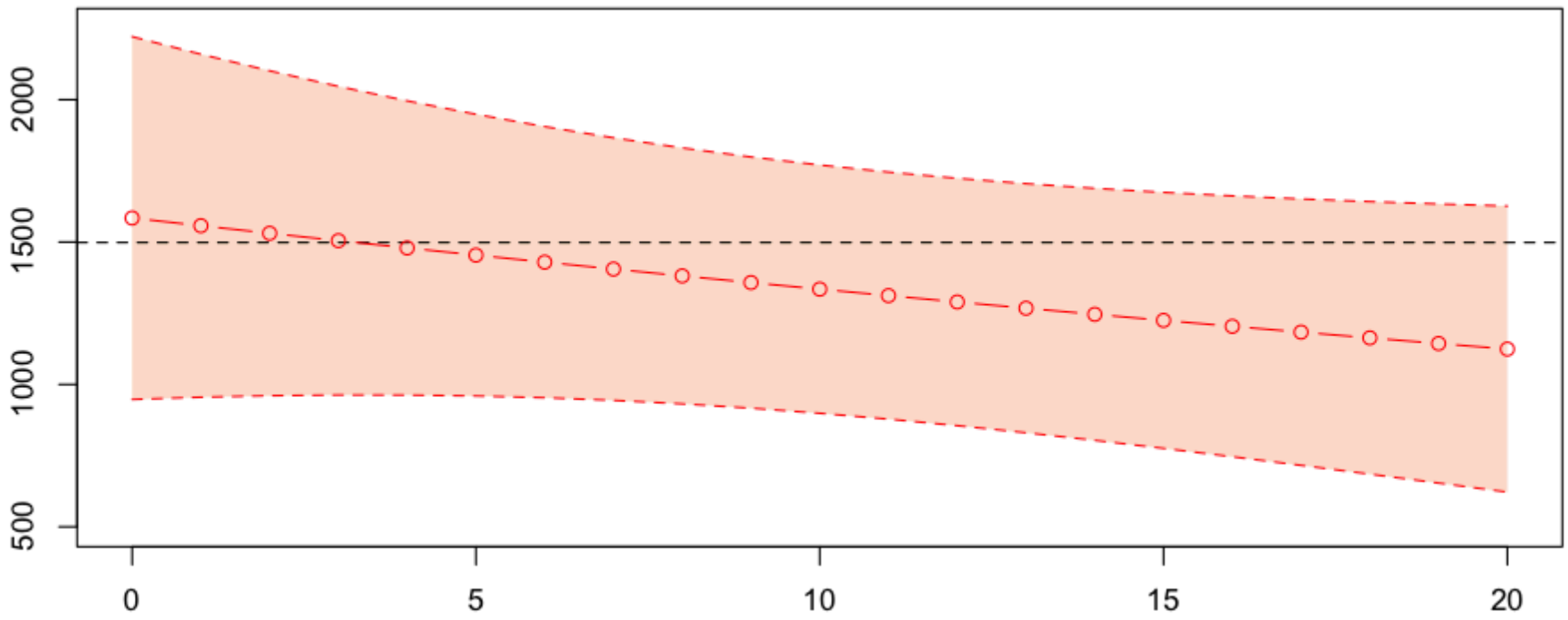
Les régressions Gamma, lognormale et inverse Gaussienne

On peut comparer les prédictions (éventuellement en fixant quelques covariables),

```
> nouveau=data.frame(agevehicule=0:20,carburant="E",zone="C")
> s=summary(regln)$sigma
> predln=predict(regln,se.fit=TRUE,newdata=nouveau)
> predg=predict(regg,se.fit=TRUE,type="response",newdata=nouveau)
> predig=predict(regig,se.fit=TRUE,type="response",newdata=nouveau)
```

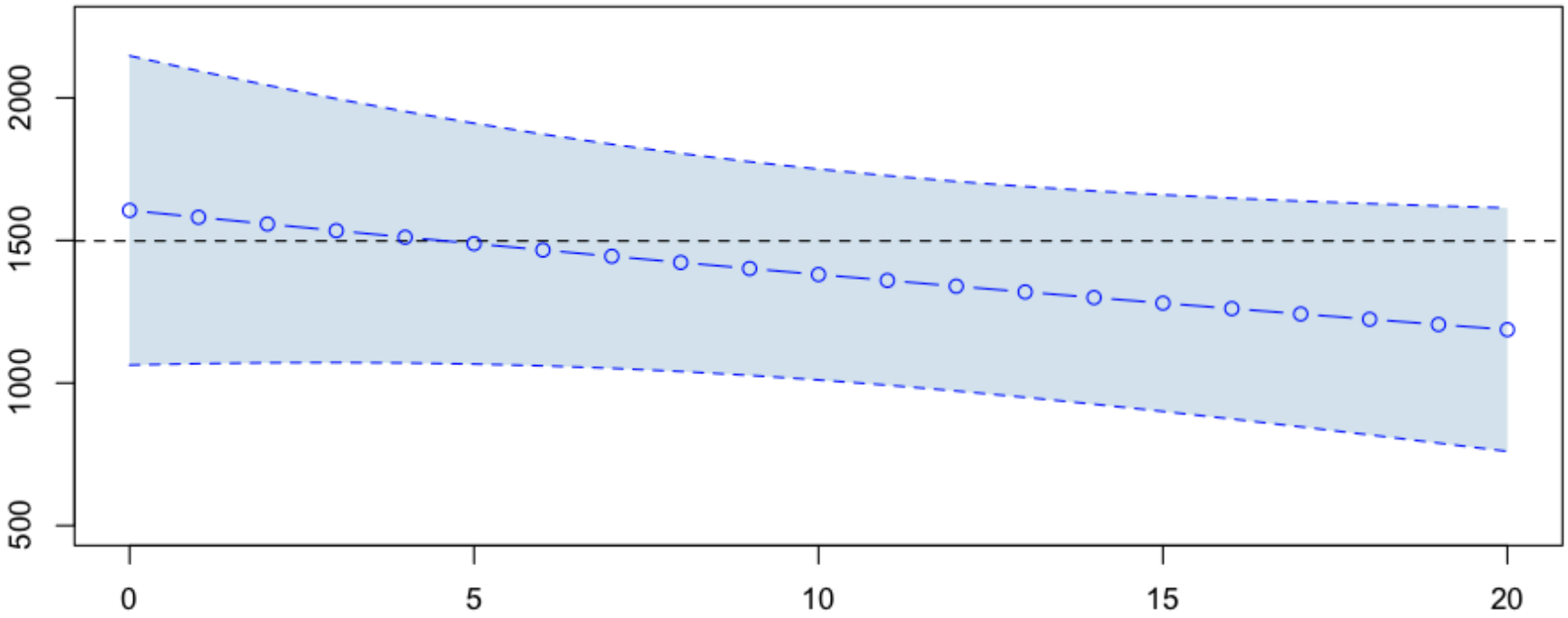
Pour le modèle log-Gamma, on a

```
> plot(0:20,predg$fit,type="b",col="red")
> lines(0:20,predg$fit+2*predg$se.fit,lty=2,col="red")
> lines(0:20,predg$fit-2*predg$se.fit,lty=2,col="red")
```



Pour le modèle log-inverse Gaussienne, on a

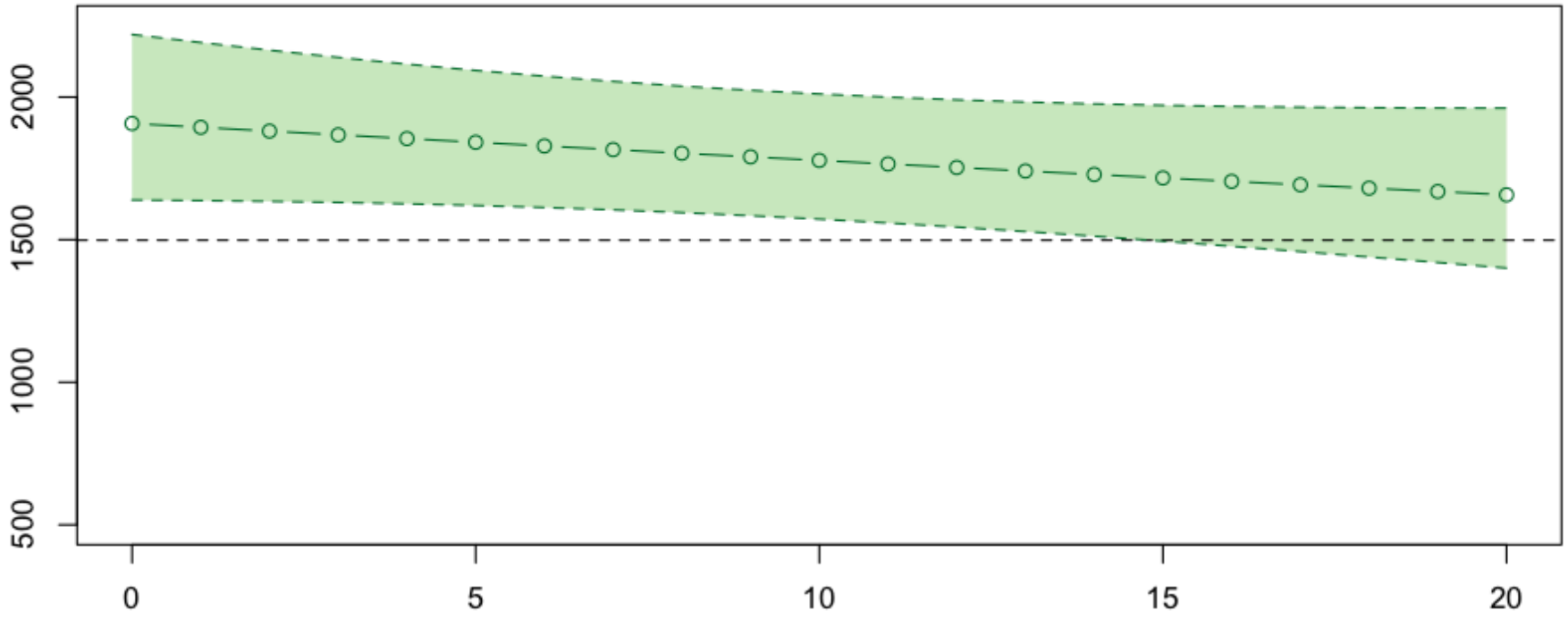
```
> plot(0:20,predig$fit,type="b",col="blue")
> lines(0:20,predig$fit+2*predg$se.fit,lty=2,col="blue")
> lines(0:20,predig$fit-2*predg$se.fit,lty=2,col="blue")
```



Pour le modèle lognormal, on a

```
> plot(0:20,exp(predln$fit+.5*s^2),type="b",col="green")
> lines(0:20,exp(predln$fit+.5*s^2+2*predln$se.fit),lty=2,col="green")
> lines(0:20,exp(predln$fit+.5*s^2-2*predln$se.fit),lty=2,col="green")
```

(les intervalles de confiance sur $\widehat{Y}$ n'ont pas trop de sens ici...)



Prise en compte des gros sinistres

On a ici quelques *gros* sinistres. L'idée est de noter que

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_i \mathbb{E}(Y|\Theta = \theta_i) \cdot \mathbb{P}(\Theta = \theta_i)$$

Supposons que Θ prenne deux valeurs, correspondant au cas $\{Y \leq s\}$ et $\{Y > s\}$. Alors

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(Y|Y \leq s) \cdot \mathbb{P}(Y \leq s) + \mathbb{E}(Y|Y > s) \cdot \mathbb{P}(Y > s)$$

ou, en calculant l'espérance sous $\mathbb{P}_{\boldsymbol{X}}$ et plus $\mathbb{P}$,

$$\mathbb{E}(Y|\boldsymbol{X}) = \underbrace{\mathbb{E}(Y|\boldsymbol{X}, Y \leq s)}_{A} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(Y \leq s|\boldsymbol{X})}_{B} + \underbrace{\mathbb{E}(Y|Y > s, \boldsymbol{X})}_{C} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(Y > s|\boldsymbol{X})}_{B}$$

Prise en compte des gros sinistres

Trois termes apparaissent dans

$$\mathbb{E}(Y|\boldsymbol{X}) = \underbrace{\mathbb{E}(Y|\boldsymbol{X}, Y \leq s)}_{A} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(Y \leq s|\boldsymbol{X})}_{B} + \underbrace{\mathbb{E}(Y|Y > s, \boldsymbol{X})}_{C} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(Y > s|\boldsymbol{X})}_{B}$$

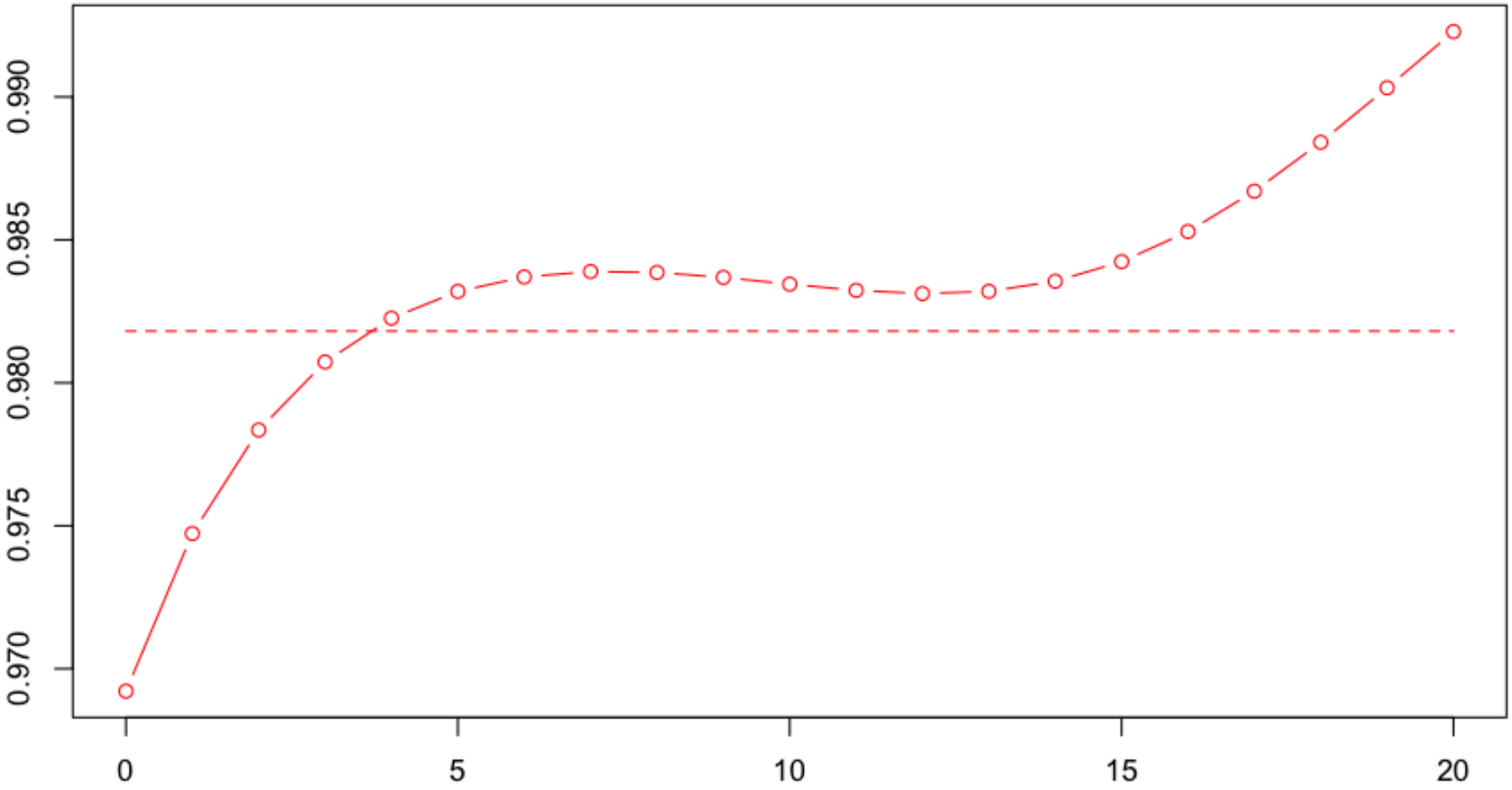
- le coût moyen des sinistres normaux, A
- la probabilité d'avoir un gros, ou un sinistre normal, si un sinistre survient, B
- le coût moyen des sinistres importants, C

Prise en compte des gros sinistres

Pour le terme B, il s'agit d'une régression *standard* d'une variable de Bernoulli,

```
> s = 10000
> couts$normal=(couts$cout<=s)
> mean(couts$normal)
[1] 0.9818087
> library(splines)
> age=seq(0,20)
> regC=glm(normal~bs(agevehicule),data=couts,family=binomial)
> ypC=predict(regC,newdata=data.frame(agevehicule=age),type="response")
> plot(age,ypC,type="b",col="red")
> regC2=glm(normal~1,data=couts,family=binomial)
> ypC2=predict(regC2,newdata=data.frame(agevehicule=age),type="response")
> lines(age,ypC2,type="l",col="red",lty=2)
```

Prise en compte des gros sinistres

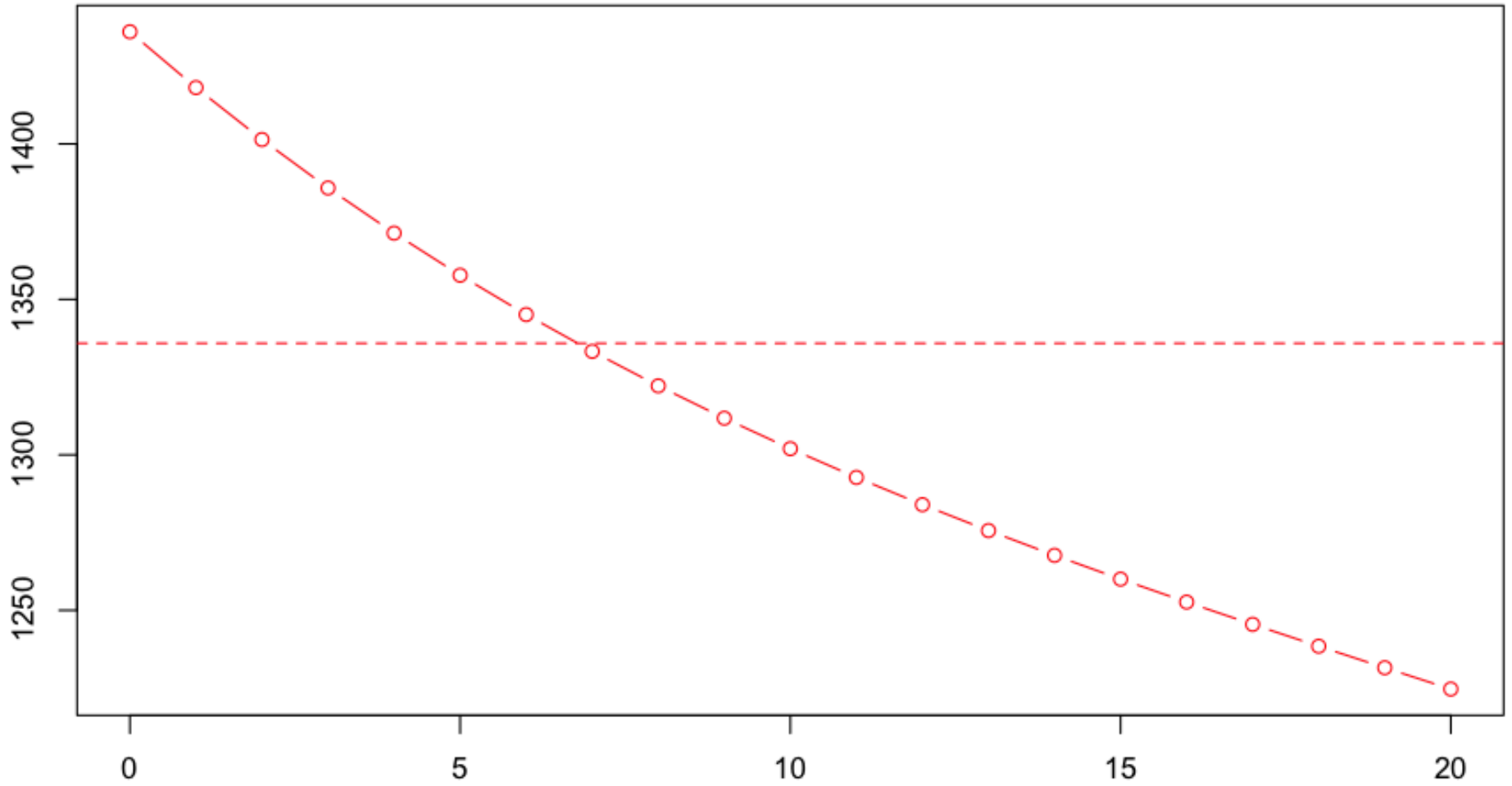


Prise en compte des gros sinistres

Pour le terme A, il s'agit d'une régression *standard* sur la base restreinte,

```
> indice = which(couts$cout<=s)
> mean(couts$cout[indice])
[1] 1335.878
> library(splines)
> regA=glm(cout~bs(agevehicule),data=couts,
+ subset=indice,family=Gamma(link="log"))
> ypA=predict(regA,newdata=data.frame(agevehicule=age),type="response")
> plot(age,ypA,type="b",col="red")
> ypA2=mean(couts$cout[indice])
> abline(h=ypA2,lty=2,col="red")
```

Prise en compte des gros sinistres

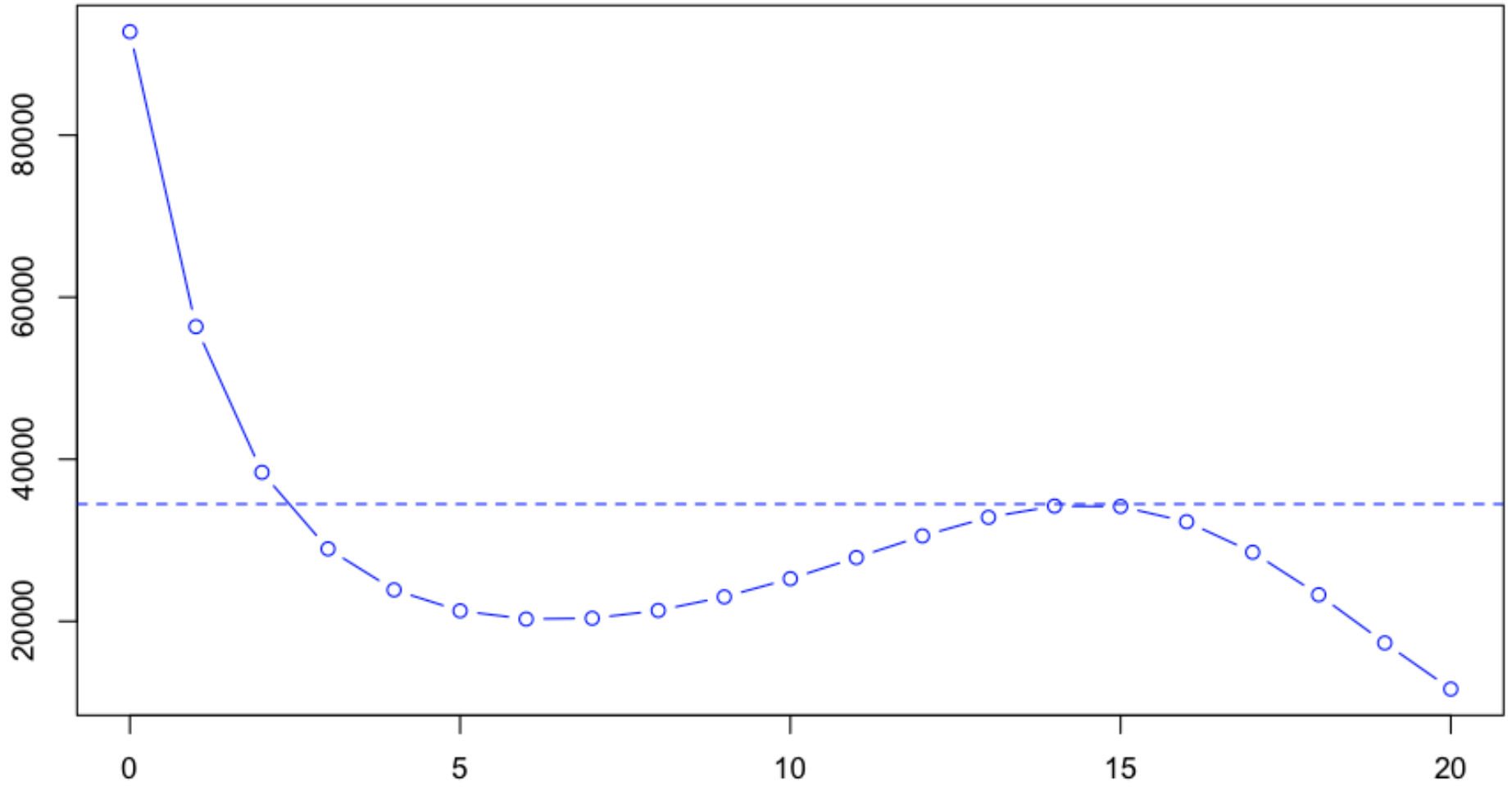


Prise en compte des gros sinistres

Pour le terme C, il s'agit d'une régression *standard* sur la base restreinte,

```
> indice = which(couts$cout>s)
> mean(couts$cout[indice])
[1] 34471.59
>  regB=glm(cout~bs(agevehicule),data=couts,
+  subset=indice,family=Gamma(link="log"))
>  ypB=predict(regB,newdata=data.frame(agevehicule=age),type="response")
>  plot(age,ypB,type="b",col="blue")
>  ypB=predict(regB,newdata=data.frame(agevehicule=age),type="response")
>  ypB2=mean(couts$cout[indice])
> plot(age,ypB,type="b",col="blue")
> abline(h=ypB2,lty=2,col="blue")
```

Prise en compte des gros sinistres

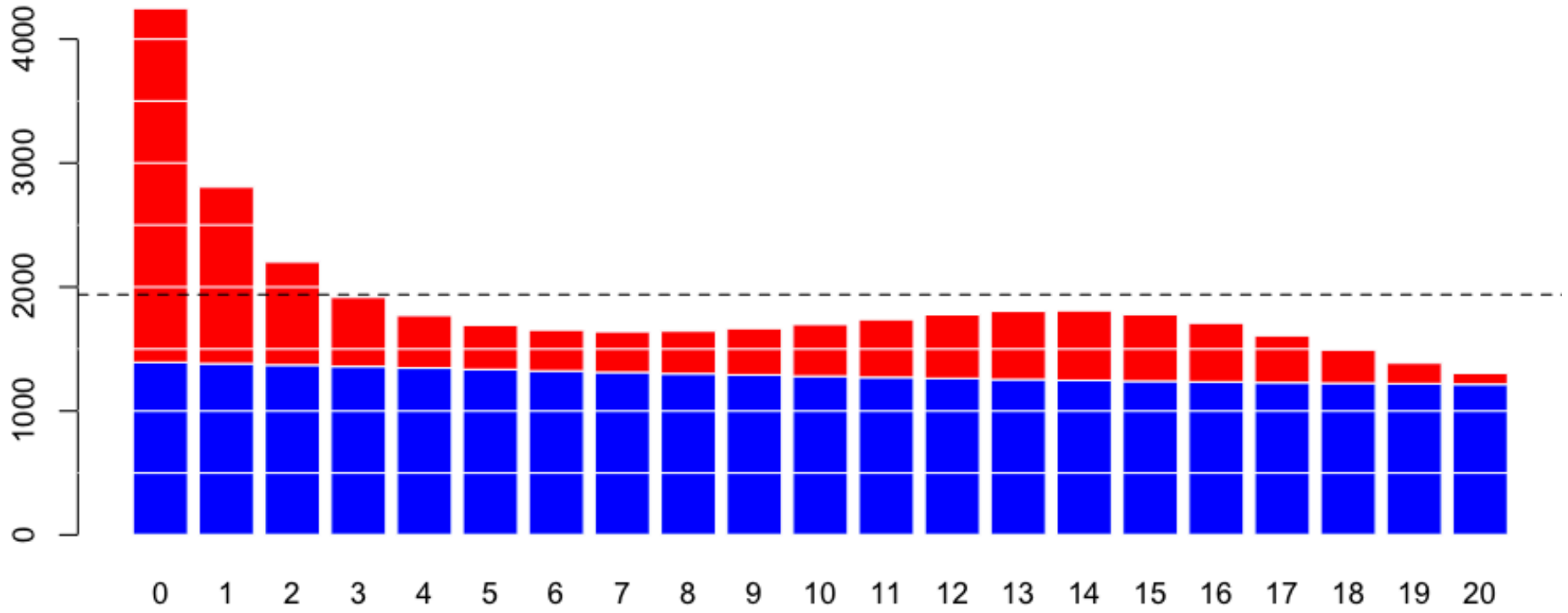


Prise en compte des gros sinistres

Reste à combiner les modèles, e.g.

$$\mathbb{E}(Y|\boldsymbol{X}) = \mathbb{E}(Y|\boldsymbol{X}, Y \leq s) \cdot \mathbb{P}(Y \leq s|\boldsymbol{X}) + \mathbb{E}(Y|Y > s, \boldsymbol{X}) \cdot \mathbb{P}(Y > s|\boldsymbol{X})$$

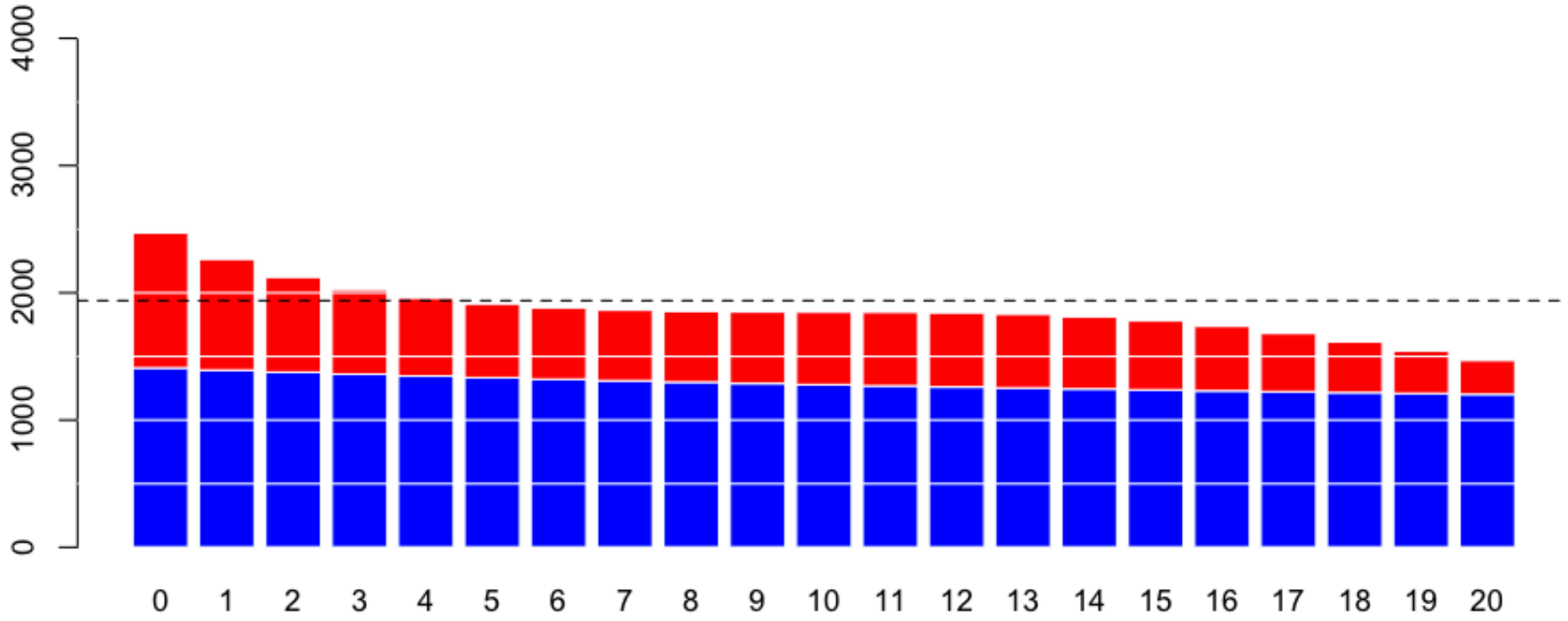
```
> indice = which(couts$cout>s)
> mean(couts$cout[indice])
[1] 34471.59
>  prime = ypA*ypC + ypB*(1-ypC))
```


0
1000
2000
3000
4000
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

ou, e.g.

$$\mathbb{E}(Y|\boldsymbol{X}) = \mathbb{E}(Y|\boldsymbol{X}, Y \leq s) \cdot \mathbb{P}(Y \leq s|\boldsymbol{X}) + \mathbb{E}(Y|Y > s \quad) \cdot \mathbb{P}(Y > s|\boldsymbol{X})$$

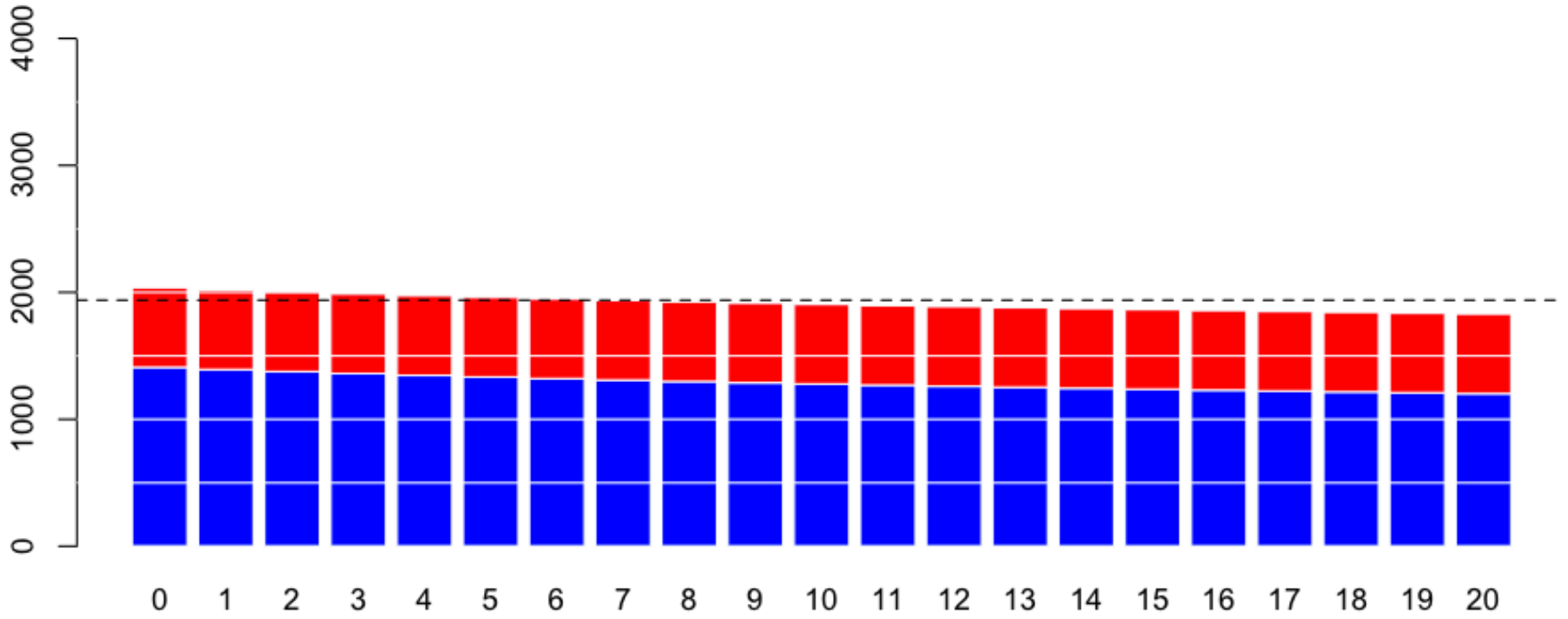
```
> indice = which(couts$cout>s)
> mean(couts$cout[indice])
[1] 34471.59
>  prime =  ypA*ypC + ypB2*(1-ypC))
```



voire e.g.

$$\mathbb{E}(Y|\boldsymbol{X}) = \mathbb{E}(Y|\boldsymbol{X}, Y \leq s) \cdot \mathbb{P}(Y \leq s \quad) + \mathbb{E}(Y|Y > s \quad) \cdot \mathbb{P}(Y > s \quad)$$

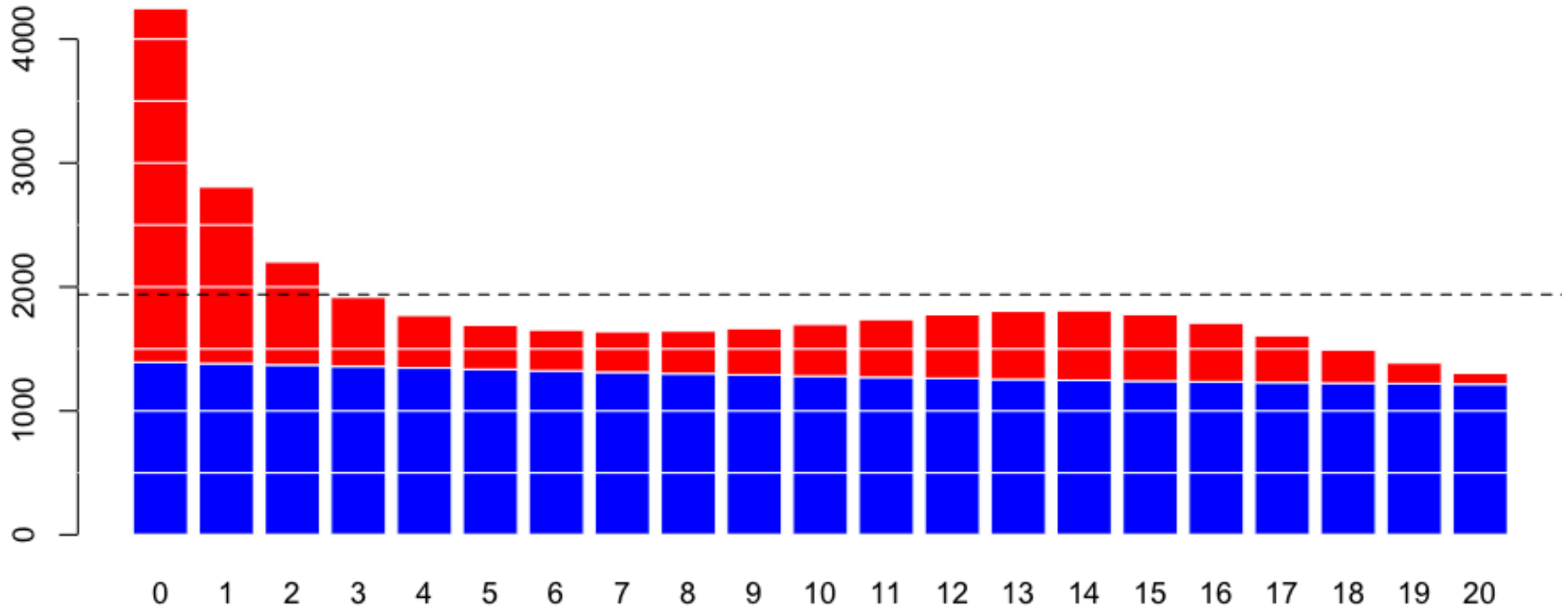
```
> indice = which(couts$cout>s)
> mean(couts$cout[indice])
[1] 34471.59
>  prime =  ypA*ypC + ypB2*(1-ypC))
```



Mais on peut aussi changer le seuil s dans

$$\mathbb{E}(Y|\boldsymbol{X}) = \mathbb{E}(Y|\boldsymbol{X}, Y \leq s) \cdot \mathbb{P}(Y \leq s \quad) + \mathbb{E}(Y|Y > s \quad) \cdot \mathbb{P}(Y > s \quad)$$

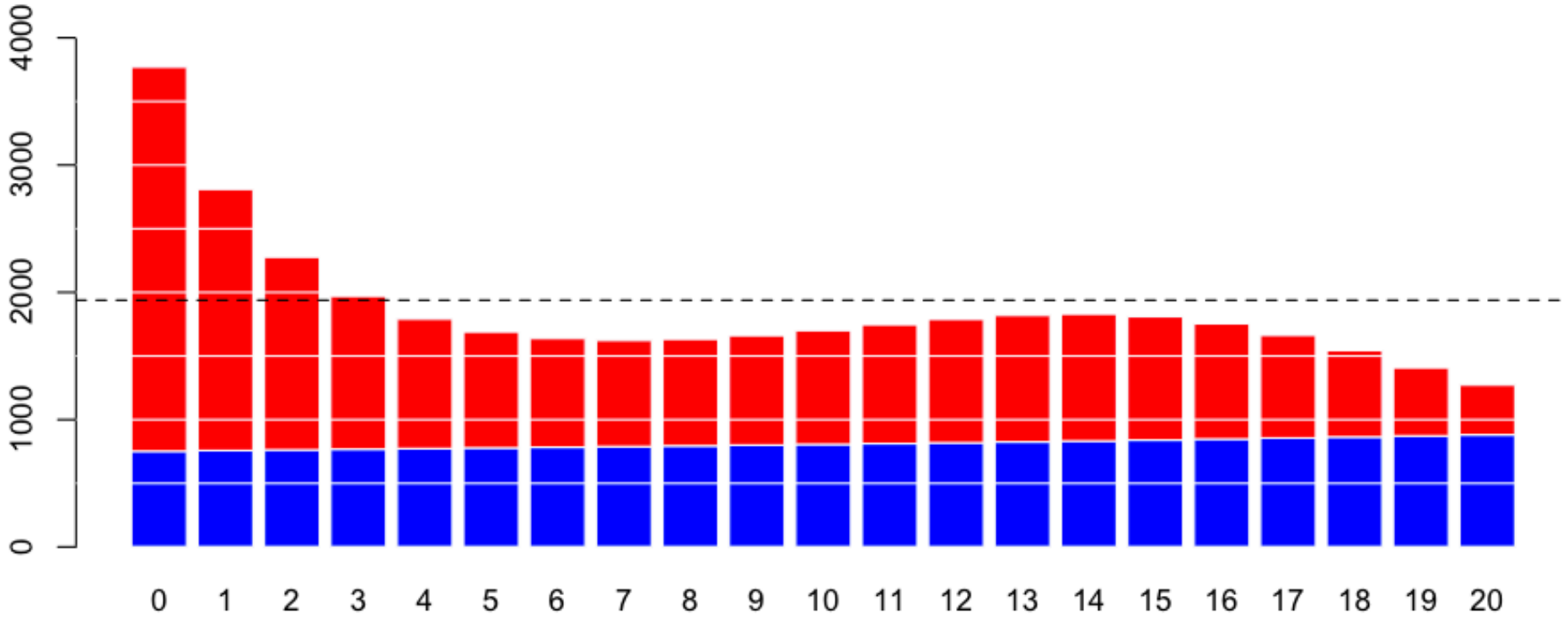
e.g. avec $s = 10,000$€,



Mais on peut aussi changer le seuil s dans

$$\mathbb{E}(Y|\boldsymbol{X}) = \mathbb{E}(Y|\boldsymbol{X}, Y \leq s) \cdot \mathbb{P}(Y \leq s \quad) + \mathbb{E}(Y|Y > s \quad) \cdot \mathbb{P}(Y > s \quad)$$

e.g. avec $s = 25,000$€,



Et s'il y avait plus que *deux* types de sinistres ?

Il est classique de supposer que la loi de Y (coût individuel de sinistres) est un mélange de plusieurs lois,

$$f(y) = \sum_{k=1}^{K} p_k f_k(y), \forall y \in \mathbb{R}_+$$

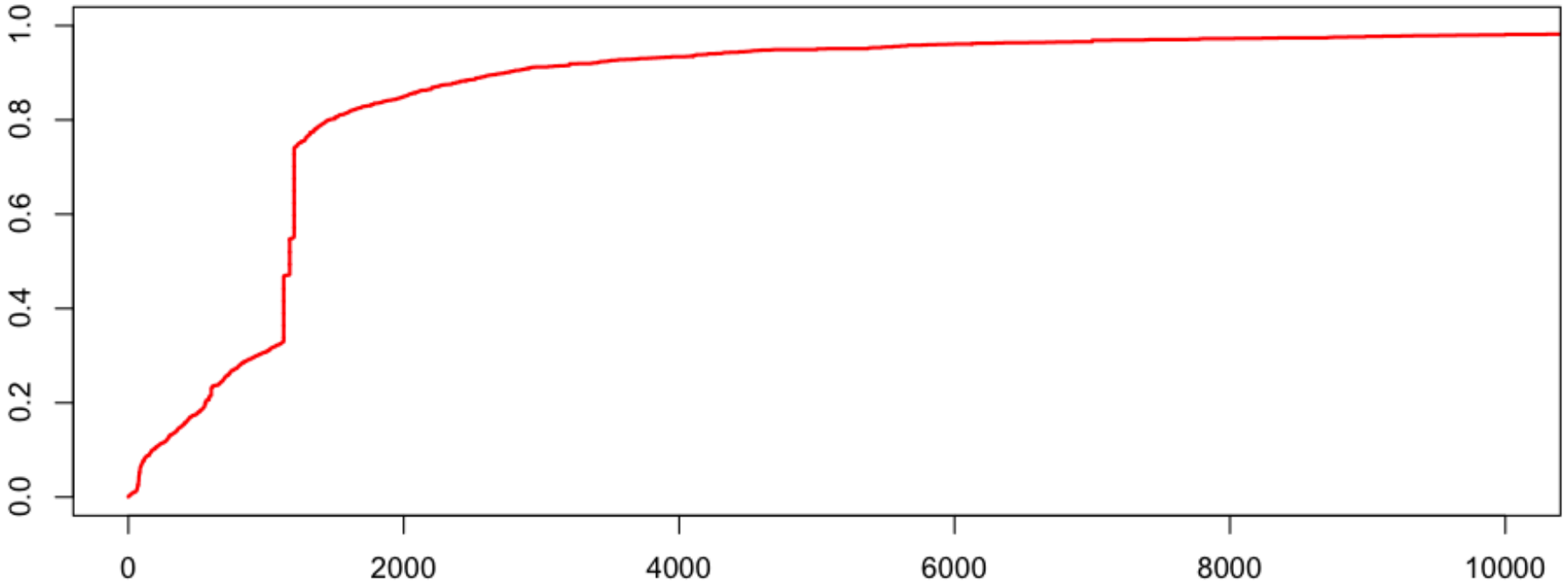
où f_k est une loi sur $\mathbb{R}_+$ et $\boldsymbol{p} = (p_k)$ un vecteur de probabilités. Ou, en terme de fonctions de répartition,

$$F(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \sum_{k=1}^{K} p_k F_k(y), \forall y \in \mathbb{R}_+$$

où F_k est la fonction de répartition d'une variable à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Et s'il y avait plus que *deux* types de sinistres ?

```
> n=nrow(couts)
> plot(sort(couts$cout),(1:n)/(n+1),xlim=c(0,10000),type="s",lwd=2,col="red")
```



Et s'il y avait plus que *deux* types de sinistres ?

On peut considérer un mélange de trois lois,

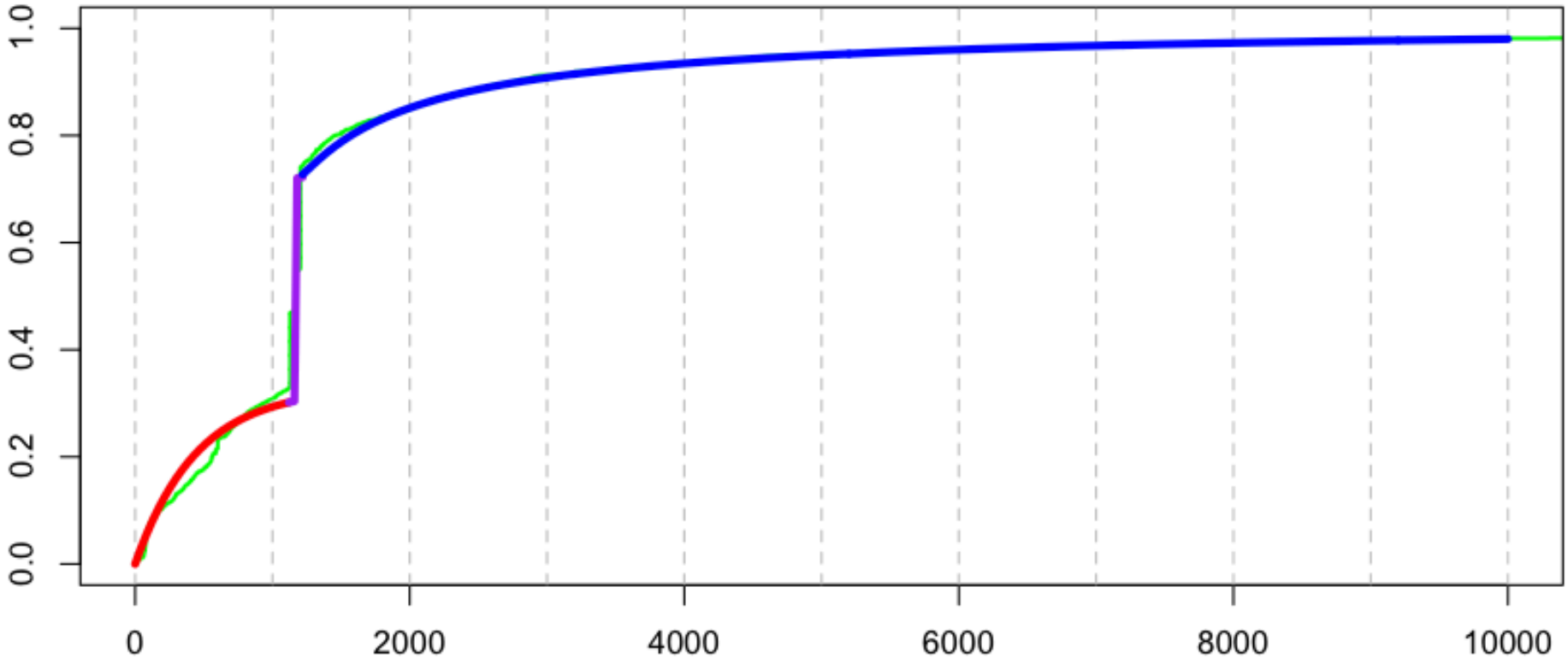
$$f(y) = p_1 f_1(x) + p_2 \delta_\kappa(x) + p_3 f_3(x), \forall y \in \mathbb{R}_+$$

avec

1. une loi exponentielle pour f_1
2. une masse de Dirac en κ (i.e. un coût fixe) pour f_2
3. une loi lognormale (décallée) pour f_3

```
>  I1=which(couts$cout<1120)
>  I2=which((couts$cout>=1120)&(couts$cout<1220))
>  I3=which(couts$cout>=1220)
>  (p1=length(I1)/nrow(couts))
[1] 0.3284823
>  (p2=length(I2)/nrow(couts))
[1] 0.4152807
>  (p3=length(I3)/nrow(couts))
```

```
[1] 0.256237
>  X=couts$cout
>  (kappa=mean(X[I2]))
[1] 1171.998
>  X0=X[I3]-kappa
>  u=seq(0,10000,by=20)
>  F1=pexp(u,1/mean(X[I1]))
>  F2= (u>kappa)
>  F3=plnorm(u-kappa,mean(log(X0)),sd(log(X0))) * (u>kappa)
>  F=F1*p1+F2*p2+F3*p3
>  lines(u,F,col="blue")
```


0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
2000
4000
6000
8000
10000

Prise en compte des coûts fixes en tarification

Comme pour les gros sinistres, on peut utiliser ce découpage pour calculer $\mathbb{E}(Y)$, ou $\mathbb{E}(Y|\boldsymbol{X})$. Ici,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y|\boldsymbol{X}) &= \underbrace{\mathbb{E}(Y|\boldsymbol{X}, Y \leq s_1)}_{A} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(Y \leq s_1|\boldsymbol{X})}_{D,\pi_1(\boldsymbol{X})} \\ &+ \underbrace{\mathbb{E}(Y|Y \in (s_1, s_2], \boldsymbol{X})}_{B} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(Y \in (s_1, s_2]|\boldsymbol{X})}_{D,\pi_2(\boldsymbol{X})} \\ &+ \underbrace{\mathbb{E}(Y|Y > s_2, \boldsymbol{X})}_{C} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(Y > s_2|\boldsymbol{X})}_{D,\pi_3(\boldsymbol{X})}\end{aligned}$$

Les paramètres du mélange, $(\pi_1(\boldsymbol{X}), \pi_2(\boldsymbol{X}), \pi_3(\boldsymbol{X}))$ peuvent être associés à une loi multinomiale de dimension 3.

Loi multinomiale (et GLM)

Rappelons que pour la régression logistique, si $(\pi, 1-\pi) = (\pi_1, \pi_2)$

$$\log \frac{\pi}{1-\pi} = \log \frac{\pi_1}{\pi_2} = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{\beta},$$

ou encore

$$\pi_1 = \frac{\exp(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\beta})}{1+\exp(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\beta})} \text{ et } \pi_2 = \frac{1}{1+\exp(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\beta})}$$

On peut définir une régression logistique multinomiale, de paramètre $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ en posant

$$\log \frac{\pi_1}{\pi_3} = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{\beta}_1 \text{ et } \log \frac{\pi_2}{\pi_3} = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{\beta}_2$$

Loi multinomiale (et GLM)

ou encore

$$\pi_1 = \frac{\exp(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\beta}_1)}{1+\exp(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\beta}_1)+\exp(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\beta}_2)}, \pi_2 = \frac{\exp(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\beta}_2)}{1+\exp(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\beta}_1)+\exp(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\beta}_2)}$$

et $\pi_3 = \dfrac{1}{1+\exp(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\beta}_1)+\exp(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\beta}_2)}$.

Remarque l'estimation se fait - là encore - en calculant numériquement le maximum de vraisemblance, en notant que

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{y}) \propto \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{3} \pi_{i,j}^{Y_{i,j}}$$

où Y_i est ici disjonctée en $(Y_{i,1}, Y_{i,2}, Y_{i,3})$ contenant les variables indicatrices de chacune des modalités. La log-vraisemblance est alors proportionnelle à

$$\log \mathcal{L}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{y}) \propto \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2} \left(Y_{i,j}\boldsymbol{X}_i'\boldsymbol{\beta}_j\right) - n_i \log\left[1+1+\exp(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\beta}_1)+\exp(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\beta}_2)\right]$$

Loi multinomiale (et GLM)

qui se résout avec un algorithme de type Newton-Raphson, en notant que

$$\frac{\partial \log \mathcal{L}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{y})}{\partial \beta_{k,j}} = \sum_{i=1}^{n} Y_{i,j} X_{i,k} - n_i \pi_{i,j} X_{i,k}$$

i.e.

$$\frac{\partial \log \mathcal{L}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{y})}{\partial \beta_{k,j}} = \sum_{i=1}^{n} Y_{i,j} X_{i,k} - n_i \frac{\exp(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\beta}_j)}{1 + \exp(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\beta}_1) + \exp(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\beta}_2)} X_{i,k}$$

Loi multinomiale (et GLM)

Sous R, la fonction `multinom` de `library(nnet)` permet de faire cette estimation. On commence par définir les trois tranches de coûts,

```
> seuils=c(0,1120,1220,1e+12)
> couts$tranches=cut(couts$cout,breaks=seuils,
+ labels=c("small","fixed","large"))
> head(couts,5)
  nocontrat    no garantie    cout exposition zone puissance agevehicule
1      1870 17219      1RC 1692.29       0.11    C         5           0
2      1963 16336      1RC  422.05       0.10    E         9           0
3      4263 17089      1RC  549.21       0.65    C        10           7
4      5181 17801      1RC  191.15       0.57    D         5           2
5      6375 17485      1RC 2031.77       0.47    B         7           4
  ageconducteur bonus marque carburant densite region tranches
1            52    50     12         E      73     13    large
2            78    50     12         E      72     13    small
3            27    76     12         D      52      5    small
4            26   100     12         D      83      0    small
5            46    50      6         E      11     13    large
```

Loi multinomiale (et GLM)

On peut ensuite faire une régression multinomiale afin d'expliquer π_i en fonction de covariables $\boldsymbol{X}_i$.

```
> reg=multinom(tranches~ageconducteur+agevehicule+zone+carburant,data=couts)
# weights:  30 (18 variable)
initial  value 2113.730043
iter  10 value 2063.326526
iter  20 value 2059.206691
final  value 2059.134802
converged
```

```
> summary(reg)
Call:
multinom(formula = tranches ~ ageconducteur + agevehicule + zone +
    carburant, data = couts)

Coefficients:
      (Intercept) ageconducteur agevehicule      zoneB      zoneC
fixed  -0.2779176   0.012071029  0.01768260 0.05567183 -0.2126045
large  -0.7029836   0.008581459 -0.01426202 0.07608382  0.1007513
           zoneD      zoneE      zoneF   carburantE
fixed -0.1548064 -0.2000597 -0.8441011 -0.009224715
large  0.3434686  0.1803350 -0.1969320  0.039414682

Std. Errors:
      (Intercept) ageconducteur agevehicule     zoneB     zoneC     zoneD
fixed   0.2371936   0.003738456  0.01013892 0.2259144 0.1776762 0.1838344
large   0.2753840   0.004203217  0.01189342 0.2746457 0.2122819 0.2151504
          zoneE     zoneF carburantE
fixed 0.1830139 0.3377169  0.1106009
large 0.2160268 0.3624900  0.1243560
```

Loi multinomiale (et GLM)

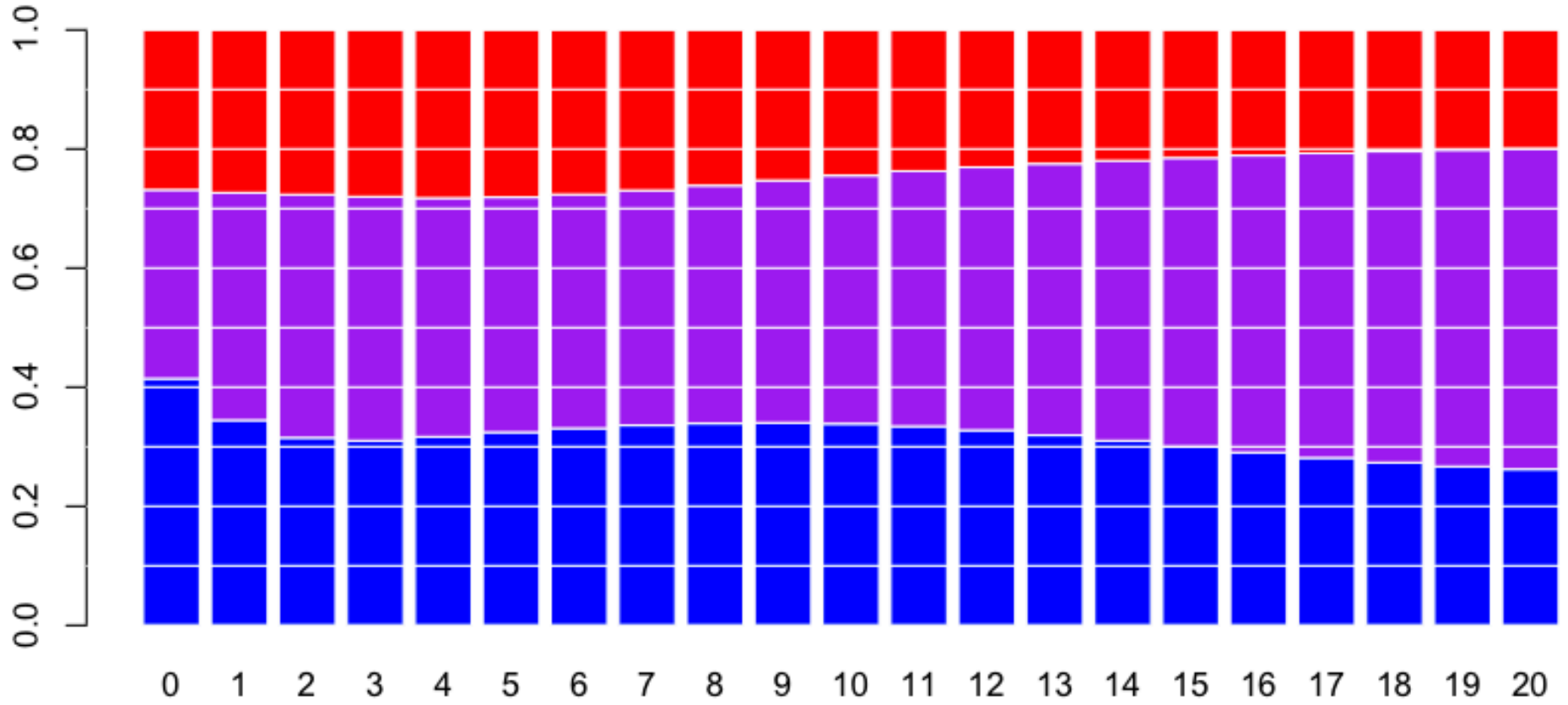
On peut régresser suivant l'ancienneté du véhicule, avec ou sans lissage,

```
> library(splines)
> reg=multinom(tranches~agevehicule,data=couts)
# weights:  9 (4 variable)
initial  value 2113.730043
final  value 2072.462863
converged
> reg=multinom(tranches~bs(agevehicule),data=couts)
# weights:  15 (8 variable)
initial  value 2113.730043
iter  10 value 2070.496939
iter  20 value 2069.787720
iter  30 value 2069.659958
final  value 2069.479535
converged
```

Loi multinomiale (et GLM)

On peut alors prédire la probabilité, sachant qu'un accident survient, qu'il soit de type 1, 2 ou 3

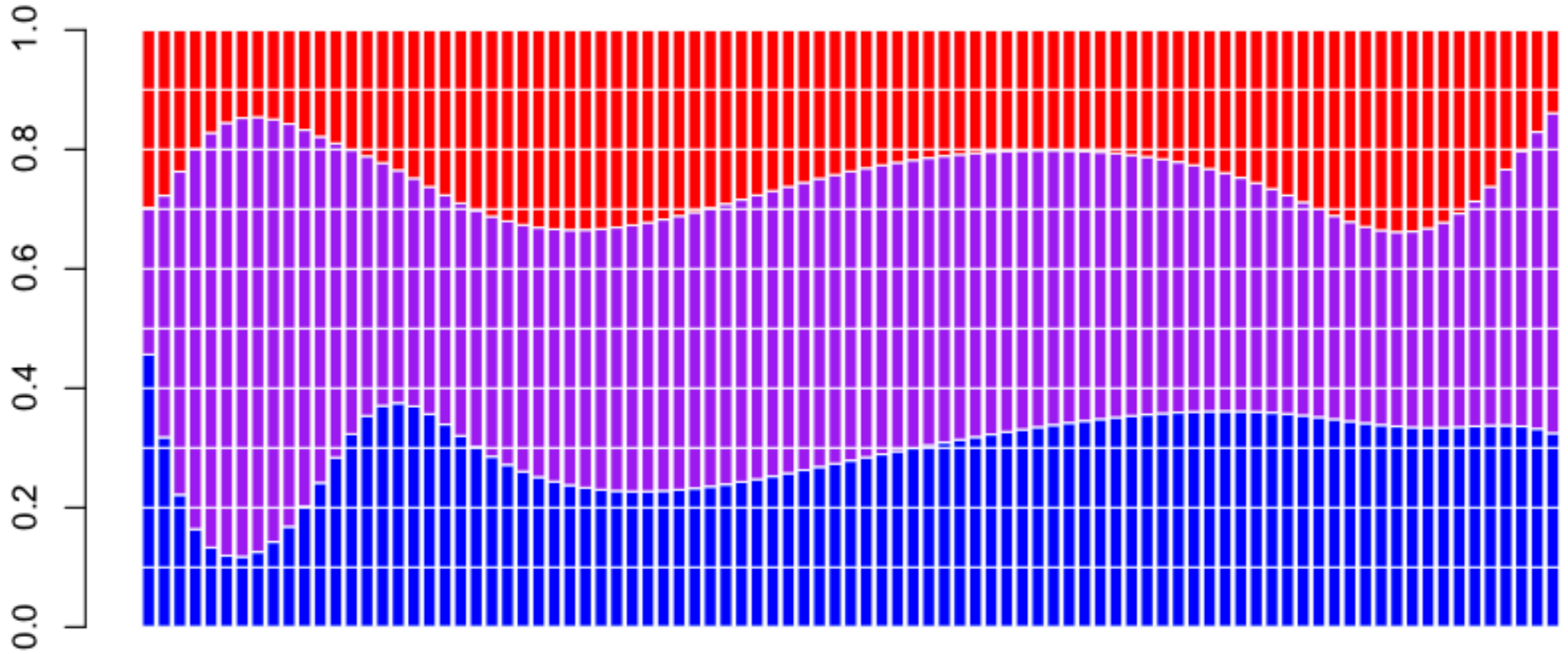
```
> predict(reg,newdata=data.frame(agevehicule=5),type="probs")
    small     fixed     large
0.3388947 0.3869228 0.2741825
```


0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

Loi multinomiale (et GLM)

ou en fonction de la densité de population

```
> reg=multinom(tranches~bs(densite),data=couts)
# weights:  15 (8 variable)
initial  value 2113.730043
iter  10 value 2068.469825
final  value 2068.466349
converged
> predict(reg,newdata=data.frame(densite=90),type="probs")
    small     fixed     large
0.3484422 0.3473315 0.3042263
```


0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

Loi multinomiale (et GLM)

Il faut ensuite ajuster des lois pour les trois régions A, B ou C

```
> reg=multinom(tranches~bs(densite),data=couts)
# weights:  15 (8 variable)
initial  value 2113.730043
iter  10 value 2068.469825
final  value 2068.466349
converged
> predict(reg,newdata=data.frame(densite=90),type="probs")
    small     fixed     large
0.3484422 0.3473315 0.3042263
```

Pour A, on peut tenter une loi exponentielle (qui est une loi Gamma avec $\phi = 1$).

```
> regA=glm(cout~agevehicule+densite+carburant,data=sousbaseA,
+ family=Gamma(link="log"))
> summary(regA, dispersion=1)

Coefficients:
```

```
             Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept)  6.0600491  0.1005279  60.282   <2e-16 ***
agevehicule  0.0003965  0.0070390   0.056    0.955
densite      0.0014085  0.0013541   1.040    0.298
carburantE  -0.0751446  0.0806202  -0.932    0.351
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

(Dispersion parameter for Gamma family taken to be 1)
```

Pour B, on va garder l'idée d'une masse de Dirac en

```
> mean(sousbaseB$cout)
[1] 1171.998
```

(qui semble correspondre à un coût fixe.

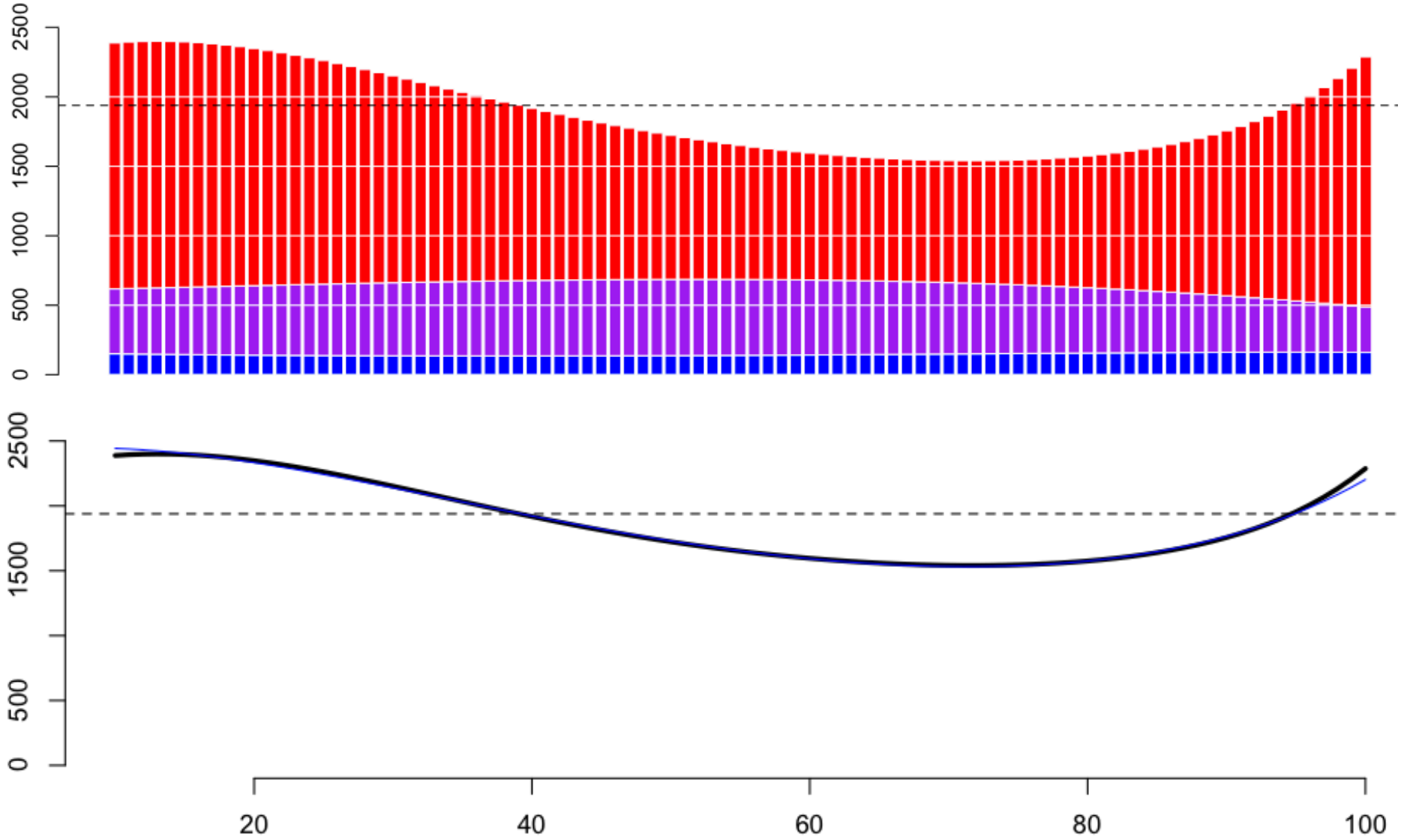
Enfin, pour C, on peut tenter une loi Gamma ou lognormale décallée,

```
> k=mean(sousbaseB$cout)
> regC=glm((cout-k)~agevehicule+densite+carburant,data=sousbaseC,
```

```
+ family=Gamma(link="log"))
> summary(regC)

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  9.119879   0.378836  24.073   <2e-16 ***
agevehicule -0.013393   0.028620  -0.468   0.6400
densite     -0.010814   0.004831  -2.239   0.0256 *
carburantE  -0.530964   0.287450  -1.847   0.0653 .
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

(Dispersion parameter for Gamma family taken to be 10.00845)
```


0
500
1000
1500
2000
2500
0
500
1500
2500
20
40
60
80
100