ACTUARIAT 1, ACT 2121, AUTOMNE 2013 (COMPLÉMENTS)

ARTHUR CHARPENTIER

$\boxed{1}$ Un certain explosif est utilisé par une compagnie minière. Le rayon R du cratère créé par cet explosif suit une loi exponentielle de moyenne 5 mètres. Trouver l'écart-type de la surface du cratère (au niveau du sol) créé par cet explosif.

A) 1111.8 B) 155.7 C) 200.5 D) 254.5 E) 351.2

$\boxed{2}$ La durée T (en minutes) d'un appel téléphonique au bureau d'assurance Smith-Taylor est une variable aléatoire continue de fonction de densité :

$$f_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ t/4 & \text{pour } 0 \leq t \leq 2 \\ 4/t^3 & \text{pour } t > 2 \end{cases}$$

Trouver l'espérance de la durée d'un appel sachant qu'il a duré plus d'une minute.

A) 3.25 B) 2.95 C) 1.87 D) 1.33 E) 1.17

$\boxed{3}$ Soit X une variable aléatoire quelconque de moyenne, $E[X] = \mu_X$, et variance, $\mathrm{Var}[X] = \sigma_X^2$. Le célèbre théorème de Tchebycheff dit que la probabilité, qui suit, est majorée par un nombre m ; que vaut m ?

$$P(|X - \mu_X| \geq 4\sigma_X)$$

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{16}$ C) $\frac{1}{9}$ D) $\frac{\sigma_X}{4}$ E) $\frac{\sigma_X^2}{16}$

$\boxed{4}$ Soit X une variable aléatoire continue de fonction de densité $f_X(x) = xe^{-x}$ pour $x \geq 0$. Trouver la série génératrice des moments, $M_X(t)$, de X.

A) $\frac{1}{1-t}$ B) $\frac{1}{1-t^2}$ C) $\frac{1}{1-2t}$ D) $\frac{1}{(1-t)^2}$ E) $\frac{2}{2-t}$

$\boxed{5}$ Le temps jusqu'au début de la première panne d'un ordinateur a une répartition exponentielle dont la médiane est de 4 jours. Trouver la probabilité que l'ordinateur fonctionnera sans avoir de panne pendant au moins 5 jours.

A) 0.38 B) 0.40 C) 0.42 D) 0.44 E) 0.46

$\boxed{6}$ L'UPA (Union des Producteurs Agricoles) achète une police d'assurance contre les pertes dues aux pluies excessives durant la saison des récoltes. La police rembourse 200 000$ pour chaque tranche complète de 10 mm de pluie au-dessus de 20 mm durant la saison. Le remboursement a un maximum (plafond) de 500 000$. Trouver l'espérance du remboursement en vous basant sur le tableau suivant établi par le bureau de météorologie :

nb de mm.	0 à 10	10 à 20	20 à 30	30 à 40	40 à 50	50 à 60	60 à 70	70 et plus
prob.	0.10	0.15	0.15	0.15	0.15	0.10	0.10	0.10

A) 180 000$ B) 200 000$ C) 240 000$ D) 285 000$ E) 390 000$

$\boxed{7}$ Soit le tableau suivant donnant les probabilités des valeurs (x, y) de deux variables aléatoires discrètes X et Y. Trouver $\mathrm{Cov}(X, Y)$, la covariance de X et Y.

		X = 0	1	2	3
Y	0	$1/12$	$1/4$	$1/8$	$1/120$
	1	$1/6$	$1/4$	$1/20$	0
	2	$1/24$	$1/40$	0	0

A) -0.14 B) -0.08 C) 0 D) 0.08 E) 0.14

$\boxed{8}$ Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad x < 1 \\ \frac{x^2-2x+2}{2} & \text{pour} \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{pour} \quad x > 2 \end{cases}$$

Trouver l'espérance de X.

A) $\dfrac{5}{6}$ B) 1 C) $\dfrac{4}{3}$ D) $\dfrac{3}{2}$ E) $\dfrac{5}{3}$

$\boxed{9}$ Soit X et Y les remboursements (aléatoires) pour les frais médicaux et les frais de réparations mécaniques respectivement lors d'un accident grave. La variance de X est 5 000\$, la variance de Y est 7 000\$, et la variance du total, $X + Y$, est 15 000\$. La compagnie décide d'augmenter X par un montant forfaitaire de 1 000\$ et d'augmenter Y de 10%.
Trouver le nouvelle variance du remboursement total.

A) 16 000\$ B) 16 770\$ C) 15 120\$ D) 14 590\$ E) 13 470\$

$\boxed{10}$ On dit qu'une variable aléatoire continue suit une loi de Paréto de paramètres $\alpha > 0$ et $\theta > 0$, si sa fonction de densité est :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\alpha\theta^\alpha}{(x+\theta)^{\alpha+1}} & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si le montant X d'une perte suit une loi de Paréto telle que :
(i) $P(X > 400) = 2P(X > 800)$ (ii) $P(X > 100) = 2P(X > 300)$
Trouver la probabilité que la perte dépasse 500.

A) 0.183 B) 0.187 C) 0.191 D) 0.195 E) 0.199

$\boxed{11}$ Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes dont la distribution conjointe est donnée par le tableau :

		X = 0	X = 1
Y	0	0.25	0.25
	1	0.125	0.375

Trouver le coefficient de corrélation $\rho_{X,Y}$.

A) 0.21 B) 0.26 C) 0.31 D) 0.36 E) 0.41

$\boxed{12}$ Un actuaire compile l'information suivante sur un portefeuille de polices d'assurance :

(i) 400 polices de plus ont été émises à des hommes qu'à des femmes ;

(ii) 300 polices de plus ont été émises à des femmes qui ne fument pas qu'à des hommes qui ne fument pas ;

(iii) 800 polices ont été émises à des fumeurs.

Trouver le nombre de polices dans ce portefeuille qui ont été émises à des femmes qui fument.

A) 50 B) 100 C) 150 D) 200 E) 350

$\boxed{13}$ La durée de vie d'un néon de marque A (respectivement B) suit une loi exponentielle de moyenne 4 ans (respectivement 2 ans). On pige au hasard deux néons ; un de marque A et un de marque B. En supposant l'indépendance, trouver la probabilité que celui de marque A dure moins de 4 ans et celui de marque B plus de 4 ans.

A) $e^{-1} - e^{-2}$ B) e^{-1} C) $1 - e^{-2}$ D) $e^{-1} - e^{-3}$ E) $e^{-2} - e^{-3}$

$\boxed{14}$ On estime que le temps avant la prochaine crise de verglas au Québec suit une loi exponentielle. De plus, selon l'expert, il y a 50% plus de chance qu'une crise de verglas arrive d'ici 100 ans qu'il n'y a de chance qu'elle arrive d'ici 50 ans.

Trouver l'espérance du temps (en années) d'ici la prochaine crise de verglas au Québec.

A) 34.66 B) 50 C) 69.31 D) 72.13 E) 144.29

$\boxed{15}$ Soit X la variable aléatoire continue dont la fonction de densité est :

$$f_X(x) = \begin{cases} 2ax & \text{pour } 0 \leq x \leq a^{-1/2} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver la valeur de a telle que la variance de X soit 2.

A) $\frac{1}{16}$ B) $\frac{1}{36}$ C) $\frac{1}{81}$ D) $\frac{1}{121}$ E) $\frac{1}{144}$

$\boxed{16}$ Une compagnie utilise un générateur électrique pour sa production, et un second si le premier tombe en panne. Les deux ont une durée de vie donnée par une loi exponentielle de moyenne 5. Trouver la variance de la durée X des opérations.

A) 50 B) 25 C) 10 D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{2}{25}$

$\boxed{17}$ Soit X une variable aléatoire continue de fonction de densité $f_X(x) = e^{-x}$ pour $x \geq 0$ et $f_X(x) = 0$ pour $x < 0$. Si $Y = X^2 - 1$ alors que vaut $F_Y(8)$?

A) $\frac{1}{3}\,e^{-3}$ B) $\frac{1}{4}\,e^{-2}$ C) $1 - e^{-3}$ D) $1 - e^{-9}$ E) $1 - 2e^{-3}$

$\boxed{18}$ Il y a 50 étudiants dans un cours de probabilités. Trouver l'espérance du nombre de jours de l'année (on exclut le 29 février) qui sont le jour de fête d'un seul étudiant de la classe.

A) 49.86 B) 47.23 C) 45.51 D) 43.59 E) 43.71

$\boxed{19}$ Soit X une variable aléatoire continue de médiane 1. Trouver la somme des médianes des deux variables aléatoires $Y = e^X$ et $Z = 2X$.

A) 2.7183 B) 4.7183 C) 2.6931 D) 1.3679 E) 1.0000

$\boxed{20}$ La série génératrice des moments de la variable aléatoire X est donnée par :

$$M_X(t) = a + bt + ct^2 + \cdots$$

Si $E[X] = 3$ et $\mathrm{Var}[X] = 1$, trouver la valeur de abc.

A) 15 B) 3 C) 6 D) 25 E) information insuffisante

$\boxed{21}$ Soit X une variable aléatoire telle que :

$$M_X(t) = ((0.6) + (0.4)e^t)^6.$$

Trouver $P(X \geq 5)$.

A) 0.041 B) 0.0041 C) 0.082 D) 0.411 E) 0.0082

$\boxed{22}$ Soit X le coût aléatoire des réparations de l'auto lors d'un accident et Y le coût des soins médicaux. Si au cours des 10 dernières années le coût des réparations a augmenté 35% et le coût des soins médicaux de 45%, de quel pourcentage la covariance de X et Y a-t-elle variée ?

A) 19.58% B) 40% C) 56.8% D) 80% E) 95.75%

$\boxed{23}$ Soit$X$ une variable aléatoire continue de fonction de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{30}x(1+3x) & \text{pour } 1 < x < 3 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver $E[\frac{1}{3X+1}]$.

A) 4 B) $\frac{7}{15}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{2}{15}$ E) $\frac{3}{20}$

$\boxed{24}$ Soit X une variable aléatoire dont la série génératrice des moments est :

$$M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n e^{nt-2}}{n!}$$

Trouver $P(X = 1)$.

A) $2e^{-2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) e^{-2} D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{2}e^{-2}$

$\boxed{25}$ Soit X et Y deux variables aléatoires dépendantes dont le coefficient de corrélation $\rho_{X,Y}$ vaut 0.5. Une étude révèle que $\mathrm{Var}[X] = 16$ et $\mathrm{Var}[Y] = 9$. Calculer $\mathrm{Var}[3X + 2Y]$.

A) 353 B) 315 C) 295 D) 252 E) 192

$\boxed{26}$ Soit X une variable aléatoire dont la série génératrice des moments est :

$$M_X(t) = (1 - 10t + 25t^2)^{-2}.$$

Trouver $\mathrm{Var}[X]$.

A) 25 B) 50 C) 250 D) 150 E) 100

$\boxed{27}$ Soit X une variable aléatoire dont la série génératrice des moments est :

$$M_X(t) = \frac{(e^t + 4)^{10}}{9\ 765\ 625}\ .$$

Trouver $P(X = 3)$.

A) 0.20 B) 0.30 C) 0.40 D) 0.50 E) 0.60

$\boxed{28}$ Le nombre N de réclamations en un an pour une police d'assurance suit une loi de Poisson de moyenne 0.15. Trouver la probabilité que dans un groupe de 20 polices indépendantes, il y ait un total d'au moins 3 réclamations sachant qu'il y en a eu au moins une.

A) 0.507 B) 0.557 C) 0.607 D) 0.647 E) 0.697

$\boxed{29}$ Le montant de toute réclamation suit une loi uniforme sur l'intervalle [100, 900]. Soit X le total de 3 réclamations aléatoires indépendantes. Trouver le coefficient de variation de X.

A) 0.0667 B) 0.125 C) 0.267 D) 0.300 E) 0.333

$\boxed{30}$ Soit X et Y des variables aléatoires continues ayant la fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x^{-3} & \text{pour } \ 1 \leq x \leq y \leq 2x \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver l'espérance de la variable conditionnée, $Y|X = x$.

A) $\dfrac{1}{x}$ B) $\dfrac{x^2}{12}$ C) $\dfrac{x+y}{2}$ D) $\dfrac{3x}{2}$ E) $2x$

$\boxed{31}$ Soit $f_{X,Y}(x,y) = 6xy + 3x^2$ pour $0 < x < y < 1$ la fonction de densité conjointe des variables aléatoires X et Y.

Trouver la fonction de densité de la variable conditionnée $X \mid Y = y$.

A) $5y^4$ B) $4y^3$ C) $\dfrac{6xy+3x^2}{4y^3}$ D) $\dfrac{6x^2y+3x^3}{4y^3}$ E) $\dfrac{6xy+3x^2}{1+3y}$

$\boxed{32}$ On estime que le poids (en kilogrammes) d'un bébé naissant dans un hôpital du Québec suit une loi normale de moyenne 3.5 et écart-type 0.4. Trouver la probabilité que le "bébé de l'année" (c'est-à-dire le premier bébé de l'année à naître dans un hôpital) en 2012, pèse moins de 4 kilos.

A) 0.8413 B) 0.8944 C) 0.9192 D) 0.9332 E) 0.9772

$\boxed{33}$ Les variables aléatoires continues X et Y ont la fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{5}x(x+y) & \text{pour } 0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver $P(0 < X < 1/2 \;\text{ et }\; 1 < Y < 2)$.

A) $\dfrac{9}{80}$ B) $\dfrac{11}{80}$ C) $\dfrac{3}{16}$ D) $\dfrac{19}{80}$ E) $\dfrac{23}{80}$

$\boxed{34}$ Selon les données du problème précédent, trouver $E[X]$.

A) $\dfrac{1}{5}$ B) $\dfrac{1}{2}$ C) $\dfrac{3}{5}$ D) $\dfrac{7}{10}$ E) $\dfrac{4}{5}$

$\boxed{35}$ Les variables aléatoires discrètes X, Y, Z sont de distribution simultanée :

$$f_{X,Y,Z}(x,y,z) = \frac{x+y+z}{36} \quad \text{où} \;\; x = 0,1,2 \;,\; y = 1,2 \quad \text{et} \quad z = 0,1.$$

Calculer $E(X \mid Y + Z > 1)$.

A) 1.5 B) 1.4 C) 1.2 D) 1.1 E) 1

$\boxed{36}$ Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes telles que :

(i) X est une binomiale de paramètres n et p ;

(ii) $Y \mid X = k$ est une Poisson de moyenne k, pour $k = 0, 1, ..., n$.

Trouver la variance de Y.

A) n B) np C) $np(1-p)$ D) np^2 E) $np(2-p)$

$\boxed{37}$ SoitX_1, X_2 et X_3, trois variables aléatoires indépendantes, toutes de loi normale, $N(\mu, \sigma^2)$. Soit $X = X_1 + 2X_2 - 2X_3$. Trouver la loi de $(X - \mu)/3\sigma$.

A) $N(0,1)$ B) $N(0,\sigma^2)$ C) $N(\mu,\sigma^2)$ D) $N(\mu, 3\sigma^2)$ E) $N(0,3)$

$\boxed{38}$ Soit 500 nombres réels choisis indépendamment dans l'intervalle [0, 4] selon la loi uniforme. Trouver approximativement la probabilité que leur moyenne arithmétique soit entre 1.95 et 2.05. (15)

A) 0.67 B) 0.72 C) 0.77 D) 0.82 E) 0.87

$\boxed{39}$ Soit X et Y deux variables aléatoires continues définies pour $0 < y < x < 1$. Supposons que la marginale X admet la fonction de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & \text{pour } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus la variable conditionnée $Y \mid X = x$, pour $0 < x < 1$, est uniforme sur l'intervalle $[0, x]$. Trouver l'espérance de la variable conditionnée $X \mid Y = y$.

A) $\dfrac{1}{2}$ B) $\dfrac{y}{2}$ C) 1 D) $\dfrac{x+y}{2}$ E) $\dfrac{1+y}{2}$

$\boxed{40}$ Selon les données du problème précédent, trouver la variance de la variable conditionnée $Y \mid X = x$.

A) $\dfrac{xy}{12}$ B) $\dfrac{x^2}{12}$ C) $\dfrac{12y}{x}$ D) $\dfrac{12}{x^2}$ E) $\dfrac{1}{12x^2}$

$\boxed{41}$ Une compagnie vend des polices d'assurance dont les prestations payées à chaque détenteur sont indépendantes et toutes de même loi ayant 2 475 de moyenne et 250 d'écart-type. Trouver le nombre minimum de polices devant être vendues de telle sorte qu'il y ait une probabilité d'au moins 95% que la prestation moyenne payée soit moindre que 2 500.

A) 128 B) 271 C) 312 D) 351 E) 384

$\boxed{42}$ On tire une flèche sur une cible circulaire de diamètre 10. En supposant que la distribution du point d'impact est uniforme sur la cible, trouver l'espérance de la distance au centre.

A) 1 B) 2 C) 5/2 D) 10/3 E) 4

$\boxed{43}$ Soit X une variable aléatoire représentant la perte lors d'un accident. On suppose que X est continue de loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0.001$. L'assureur impose une déductible de 500. Si à cause de l'inflation X augmente de 10% et que la compagnie maintient son déductible inchangé à 500, de quel pourcentage augmente l'espérance du remboursement ?

A) 4.6% B) 8.34% C) 10.97% D) 15.12% E) 18.7%

$\boxed{44}$ Soit $f_{X,Y}(x,y) = \dfrac{5}{16}\,xy^2$, pour $0 < x < y < 2$, la fonction de densité conjointe de X et Y. Trouver l'espérance de la marginale X.

A) $\dfrac{10}{9}$ B) $\dfrac{20}{9}$ C) $\dfrac{40}{27}$ D) $\dfrac{20}{81}$ E) $\dfrac{67}{40}$

$\boxed{45}$ La perte X d'un assuré est uniformément distribuée sur l'intervalle $[0,\ 1\ 000]$. Trouver le déductible D à imposer par la compagnie d'assurance dans sa police pour que l'espérance du remboursement soit égale à 90% de l'espérance de la perte.

A) 31.32 B) 41.32 C) 51.32 D) 61.32 E) 71.32

$\boxed{46}$ Soit X et Y deux variables de loi $N(0,1)$ chacunes et telles que $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0.5$.
Trouver $P(X+Y \leq 3)$.

A) 0.99 B) 0.96 C) 0.93 D) 0.89 E) 0.86

$\boxed{47}$ La prime pour une assurance dentaire individuelle est fixée à 5% de plus que l'espérance de la réclamation annuelle X. Sachant que 400 polices ont été vendues et que X suit une loi exponentielle de moyenne 200.
Évaluer la probabilité que la compagnie d'assurance perde de l'argent.

A) 0.231 B) 0.159 C) 0.096 D) 0.028 E) 0.024

$\boxed{48}$ Une compagnie fait une offre à cinq consommateurs potentiels. La compagnie croit que la probabilité de faire une vente est de 0.7 pour chacun des trois premiers consommateurs mais qu'elle est seulement de 0.2 pour chacun des deux autres. Les achats d'un consommateur sont indépendants des achats d'un autre consommateur. Calculer la probabilité qu'au plus deux consommateurs acceptent l'offre.

A) 15% B) 25% C) 35% D) 46% E) 49%

$\boxed{49}$ Vous entreprenez un long voyage en avion de Montréal à Tokyo. Le voyage se fera en trois étapes ; un vol de la compagnie A de Montréal à Boston, puis un vol de la compagnie B de Boston à Los Angeles, et finalement un vol de la compagnie C de Los Angeles à Tokyo. Les probabilités de perdre un bagage pour les compagnies A, B et C, sont respectivement 0.010, 0.011, 0.012. Si en arrivant à Tokyo vous constatez que votre bagage a été perdu, qu'elle est la probabilité que ce soit la compagnie C qui l'ait perdu.

A) 0.3166 B) 0.3333 C) 0.3600 D) 0.3636 E) 0.3715

$\boxed{50}$ Soit X une variable aléatoire continue de fonction de densité :
$f_X(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{pour } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Trouver l'écart-type de X.

A) 0.5477 B) 0.3614 C) 0.2236 D) 0.1092 E) 0.0500

$\boxed{51}$ Les variables aléatoires continues X et Y ont la fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y & \text{pour } 0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver $P\left(X \leq \frac{1}{3} \mid Y = \frac{1}{3}\right)$.

A) $\frac{5}{21}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{3}{71}$ D) $\frac{11}{21}$ E) $\frac{13}{21}$

$\boxed{52}$ Supposons que les nombres aléatoires d'accidents durant l'année à venir pour un couple sont $X = 0, 1$ ou 2, pour la femme, et $Y = 1$ ou 2, pour l'homme. Si la distribution conjointe est $p(x, y) = \frac{x+y}{15}$ pour $x = 0, 1, 2$ et $y = 1, 2$, trouver la variance de Y.

A) 0.40 B) 0.24 C) 0.30 D) 0.36 E) 0.60

$\boxed{53}$ Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi normale avec $\mu_X = 5$, $\mu_Y = 7$, $\sigma_X = 3$ et $\sigma_Y = 4$. Trouver la probabilité que $Y - X$ soit plus grand que 7.

A) 0.97 B) 0.84 C) 0.58 D) 0.16 E) 0.03

$\boxed{54}$ Le plan d'assurance dentaire d'une compagnie de 50 employés rembourse les dépenses dentaires sujet à un déductible de 100. Pour tout employé (indépendamment les uns des autres) le montant des dépenses dentaires est une variable aléatoire discrète de densité :

X	0	100	200	500	1 000
Prob.	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

Trouver approximativement le $99^{\text{ième}}$ percentile du remboursement total des 50 employés.

A) 11 640 B) 12 940 C) 13 640 D) 14 940 E) 15 640

$\boxed{55}$ Une compagnie veut établir un fonds qui a une probabilité de 95% d'être suffisant (sans tenir compte d'un rendement d'intérêt sur le fonds) pour donner 50 000$ de prestation au décès d'un quelconque de ses 1 000 employés. En supposant que tout employé, indépendamment des autres, a une probabilité de 1.4% de décéder durant la période visée, trouver approximativement la valeur minimale de ce fonds.

A) 705 590 B) 805 590 C) 905 590 D) 1 005 590 E) 1 105 590

$\boxed{56}$ Pour un certain grand portfolio de polices d'assurance, le nombre de réclamations suit un processus de Poisson. L'espérance du nombre de réclamations sur une période de 2 ans est de 54. Trouver la probabilité qu'il n'y ait aucune réclamation durant le prochain mois.

A) 0.025 B) 0.045 C) 0.095 D) 0.205 E) 0.105

$\boxed{57}$ Laquelle des séries de puissances suivantes est la série génératrice des moments d'une variable aléatoire de loi exponentielle ? (10)

A) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$ B) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\ t^n$ C) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}$ D) $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$ E) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\ t^n$

$\boxed{58}$ On dit qu'une variable aléatoire continue X, $0 < X < 1$, suit une *loi Bêta* de paramètres $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, si sa fonction de densité est :

$$f_X(x) = \begin{cases} kx^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & \text{pour } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Supposons que le pourcentage X des polices pour lesquelles il y a une réclamation durant un mois donné suit une loi Bêta de paramètres $\alpha = 2$ et $\beta = 3$ Trouver l'espérance de X.

A) 0.2 B) 0.4 C) 0.5 D) 0.6 E) 0.8

$\boxed{59}$ La population d'un petit pays d'Amérique Centrale est de 8 700 000 habitants. On estime que d'ici deux ans la population de ce pays deviendra $Y = (8\ 700\ 000)e^X$ où X est de loi normale avec $E[X] = 0.01$ et $\text{Var}[X] = 0.0004$. Trouver la probabilité que la population de ce pays augmentera mais de pas plus de 300 000 habitants d'ici deux ans.

A) 0.556 B) 0.516 C) 0.576 D) 0.536 E) 0.496

$\boxed{60}$ On suppose que le montant X d'une réclamation est une variable aléatoire *lognormale* c'est-à-dire que son logarithme est de loi normale) de paramètres $\mu = 10$ et $\sigma = 2$. Trouver la probabilité que parmi 10 réclamations (prises au hasard) la troisième plus petite dépasse 4 000.

A) 0.69 B) 0.61 C) 0.49 D) 0.41 E) 0.30

$\boxed{61}$ Dans un jeu de hasard, le joueur lance deux dés (bien équilibrés à six faces), un dé rouge et un dé vert. Il gagne si le dé rouge fait 1, 2, ou 3, ou si le total des deux dés est 11. Trouver la probabilité que le joueur gagne.

A) $\dfrac{7}{36}$ B) $\dfrac{4}{9}$ C) $\dfrac{19}{36}$ D) $\dfrac{5}{9}$ E) $\dfrac{29}{36}$

$\boxed{62}$ On lance dix fois de suite une paire de dés bien équilibrés.
Trouver la probabilité que jamais dans les dix lancés on ait obtenu un total de 7 ou 11.

A) $(28/36)^{10}$ B) $(30/36)^{10}(34/36)^{10}$ C) $[1 - (6/36)(2/36)]^{10}$

D) $1 - (8/36)^{10}$ E) $[1 - (6/36)^{10}][1 - (2/36)^{10}]$

$\boxed{63}$ Un missile a pour cible le centre d'un cercle de rayon un kilomètre et on suppose que son point d'impact est aléatoire et uniformément distribué dans ce cercle. Si l'explosion détruit tout dans un rayon d'un demi-kilomètre, trouver la probabilité que la cible soit détruite.

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{\pi}{8}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{\pi}{16}$ E) $\frac{1}{8}$

$\boxed{64}$ Une compagnie d'assurance auto classe ses clients en conducteurs *prudents* (70%) et conducteurs *imprudents* (30%). On estime que la probabilité d'un accident (grave) durant l'année est de 5% (respectivement 50%) pour un conducteur prudent (respectivement imprudent). La compagnie décide de charger comme prime annuelle 400$ fois la probabilité d'avoir un accident durant l'année qui commence. Si un conducteur pris au hasard a eu des accidents graves à chacune des deux dernières années, quelle prime devrait-on lui charger pour la prochaine année ?

A) 76.00$ B) 110.20$ C) 134.37$ D) 195.90$ E) 200.00$

$\boxed{65}$ Soit X une variable aléatoire continue de fonction de densité proportionnelle à $x^{-1/2}$ pour x dans l'intervalle $[0,\,4]$. Calculer $P\left(X > \frac{1}{4} \;\middle|\; X < \frac{1}{2}\right)$

A) 0.29 B) 0.31 C) 0.33 D) 0.35 E) 0.37

$\boxed{66}$ Le nombre X de minutes en avance ou en retard pour l'arrivée du vol Montréal-Québec est une variable aléatoire continue de fonction de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{36 - x^2}{288} & \text{pour } -6 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Sachant que le vol est arrivé en retard (c'est-à-dire $X > 0$), trouver la probabilité qu'il ait été moins de 3 minutes en retard (c'est-à-dire $X < 3$).

A) $\frac{19}{24}$ B) $\frac{5}{6}$ C) $\frac{7}{8}$ D) $\frac{11}{16}$ E) $\frac{23}{24}$

$\boxed{67}$ Soit $X_1, X_2, \cdots, X_6$ des variables aléatoires indépendantes, toutes de fonction de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & \text{pour } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver $E[\max(X_1, X_2, \cdots, X_6)]$.

A) $\frac{5}{6}$ B) $\frac{11}{12}$ C) $\frac{12}{13}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{9}{10}$

$\boxed{68}$ Une actuaire constate que parmi les clients qui ont une police d'assurance résidentielle et aussi une police d'assurance automobile avec sa compagnie, on a :

(i) la probabilité que le client dépose une réclamation sur sa police résidentielle durant l'année est 0.05 :

(ii) la probabilité que le client dépose une réclamation sur sa police automobile durant l'année est 0.10 :

(iii) la probabilité que le client dépose une réclamation sur sa police résidentielle mais pas sur sa police automobile durant l'année est 0.02.

Trouver la probabilité que durant l'année un client ne dépose aucune réclamation (ni résidentielle, ni automobile).

A) 0.98 B) 0.93 C) 0.88 D) 0.83 E) 0.78

$\boxed{69}$ Une compagnie d'assurance classe ses clients en *normaux* (65%), *gras* (15%) et *obèses* (20%). Une étude montre que, durant une période de 25 ans, les gras ont deux fois plus de chance de mourir que les normaux, et deux fois moins que les obèses. Si un client pris au hasard est mort durant la période de 25 ans, trouver la probabilité qu'il était obèse.

A) 20% B) 41.18% C) 45.71% D) 30.33% E) 25%

$\boxed{70}$ Pour une police d'assurance, un maximum de cinq réclamations par année peuvent être rapportées. Soit p_n, pour $n = 0, 1, ..., 5$, la probabilité que le détenteur fasse n réclamations dans l'année. Un actuaire constate les faits suivant :

(i) $p_0 > p_1 > p_2 > p_3 > p_4 > p_5$;

(ii) les différences $p_0 - p_1$, $p_1 - p_2$, $p_2 - p_3$, $p_3 - p_4$ et $p_4 - p_5$ sont toutes égales ;

(iii) exactement 50% des détenteurs rapportent une ou aucune réclamation.

Trouver la probabilité qu'un détenteur rapporte exactement 4 réclamations durant l'année.

A) $\dfrac{1}{12}$ B) $\dfrac{7}{48}$ C) $\dfrac{1}{8}$ D) $\dfrac{5}{48}$ E) $\dfrac{3}{16}$

$\boxed{71}$ Dans la ville de Saint-Sauveur durant l'hiver, le nombre d'incendies qui surviennent durant n'importe quel jour de semaine (c'est-à-dire de lundi à vendredi) est une variable aléatoire de Poisson de moyenne 0.2 par jour et le nombre d'incendies qui surviennent durant n'importe quel jour de fin de semaine (c'est-à-dire samedi ou dimanche) est une variable aléatoire de Poisson de moyenne 0.5. On suppose l'indépendance d'un jour à l'autre. Trouver la probabilité qu'exactement deux incendies surviennent durant une semaine complète d'hiver.

A) 0.50 B) 0.47 C) 0.41 D) 0.27 E) 0.17

$\boxed{72}$ La durée de bon fonctionnement X (en années) d'un ordinateur est une variable aléatoire continue de fonction de densité proportionnelle à $(1+x)^{-2}$ pour x dans l'intervalle $[0, 5]$. Calculer la probabilité que l'ordinateur fonctionne bien durant au moins 3 ans.

A) 0.75 B) 0.50 C) 0.30 D) 0.10 E) 0.05

$\boxed{73}$ « Bonjour, je m'appelle Arthur Charpentier et je suis votre professeur de probabilités. Je ne vous conterai pas ma vie mais je suis mathématicien et j'ai quatre enfants. D'ailleurs je vous présente mes fils Hugo et Victor qui sont ici aujourd'hui » Trouver la probabilité que mes quatre enfants soient tous des garçons. (On suppose que vous ne disposez d'aucune autre information concernant le sexe de mes enfants).

A) $\frac{1}{15}$ B) $\frac{1}{11}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{2}$

$\boxed{74}$ À Boston parmi les gens qui regardent la TV à 18h00, les sondages disent que 35% écoutent les nouvelles, 20% regardent une comédie et les autres d'autres émissions. Si on choisit au hasard 10 personnes qui écoutent la TV à 18h00, trouver la probabilité qu'exactement 4 écoutent les nouvelles et au moins 2 regardent une comédie.

A) 0.096 B) 0.142 C) 0.163 D) 0.228 E) 0.297

$\boxed{75}$ À un souper bénéfice, il y a 25 femmes et 20 hommes. On attribue au hasard en ordre cinq prix de présence aux 45 convives (au plus un par personne). Trouver la probabilité d'avoir pigé deux femmes avant de piger le troisième homme.

A) 0.160 B) 0.162 C) 0.164 D) 0.166 E) 0.168

$\boxed{76}$ On lance trois dés pipés (c'est-à-dire mal équilibrés). Considérons les événements suivants :

A : le résultat du 1^{er} dé est plus petit que 3

B : le résultat du 2^{e} dé est plus petit que 3

C : le résultat du 3^{e} dé est plus petit que 3

Supposons que $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.4$ et $P(C) = 0.6$. Trouver la valeur de

$P(A \cup B) + P(B \cup C) + P(A \cup C)$.

A) 2.25 B) 1.96 C) 1.74 D) 1.52 E) 1.20

$\boxed{77}$ Dans un groupe d'amis, il y a 5 personnes dont 3 hommes et 2 femmes. Pour les femmes (respectivement les hommes) on évalue que la probabilité de décès d'ici 20 ans est 0.1 (respectivement 0.2).

Trouver la probabilité qu'au moins 4 de ces 5 personnes soient encore vivantes dans 20 ans.

A) 0.385 B) 0.500 C) 0.645 D) 0.792 E) 0.818

$\boxed{78}$ Une compagnie d'assurance a trois succursales A, B et C, qui ont respectivement 400, 250 et 700 polices. Chaque police est ou bien une assurance maison ou bien (exclusivement) une assurance auto. Les pourcentages d'assurances maison pour les trois succursales A, B, C sont respectivement 30%, 70% et 25%. Une police d'assurance de la compagnie est choisie au hasard et c'est une police d'assurance maison.

Trouver la probabilité qu'elle provienne de la succursale A.

A) 0.255 B) 0.304 C) 0.324 D) 0.451 E) 0.473

$\boxed{79}$ Une machine est composée de n moteurs. Chaque moteur a une probabilité p, indépendamment des autres moteurs, de bien fonctionner pendant un mois complet. La machine ne fonctionne plus si au moins un de ses moteurs tombe en panne.

Trouver la probabilité que la machine tombe en panne durant le mois.

A) p^n B) $1 - p^n$ C) $(1 - p)^n$ D) np E) $1 - (1 - p)^n$

$\boxed{80}$ Un actuaire qui étudie les accidents d'automobiles avec décès dans la ville de Montréal a compilé les données suivantes :

Météo du jour	% des jours	probabilité d'accident mortel
pluie	20%	0.05
neige	25%	0.08
grêle	1%	0.10
verglas	2%	0.15
sans précipitation	52%	0.03

Sachant que le jour de ma fête il n'y a pas eu d'accident d'autos mortel à Montréal, trouver la probabilité que c'était un jour de pluie (On suppose que vous ne connaissez pas le jour de ma fête).

A) 0.200 B) 0.204 C) 0.209 D) 0.212 E) 0.236

$\boxed{81}$ Une compagnie d'assurance émet trois types de polices d'assurance A, B et C, dans les proportions 40%, 35% et 25% respectivement. Pour les trois types d'assurance, la probabilité d'un décès est respectivement de 0.100, 0.010 et 0.001.

Si un assuré survit, trouver la probabilité que sa police ne soit pas du type B.

A) 62.6% B) 63.8% C) 65% D) 66.2% E) 67.4%

$\boxed{82}$ Les données sur un certain test de grossesse indiquent que pour une femme enceinte le test donnera un résultat négatif (elle n'est pas enceinte) dans 10% des cas. Pour une femme qui n'est pas enceinte, le test donnera un résultat positif dans 20% des cas. De plus, on sait que 30% des femmes qui passent le test sont enceintes. Déterminer la probabilité qu'une femme obtienne un test positif sachant qu'elle est enceinte.

A) 55.75% B) 65.85% C) 70.50% D) 85% E) 90%

$\boxed{83}$ Un inspecteur est informé que dans un certain bar malfamé de la rue St-Laurent à Montréal, une des trois machines de loto-poker a été trafiquée. Avec cette machine la probabilité de gagner est de 0.001, alors qu'elle devrait normalement être de 0.01 (comme sur les deux autres machines). L'inspecteur joue 200 fois de suite sur une des trois machines prise au hasard et gagne zéro fois. Trouver la probabilité que c'était la machine trafiquée.

A) 50% B) 66.7% C) 75% D) 90% E) 99%

$\boxed{84}$ On lance 5 fois un dé.

Trouver la probabilité que le produit des 5 résultats soit un nombre pair.

A) $\frac{1}{32}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{31}{32}$

$\boxed{85}$ Le logarithme naturel de la variable aléatoire X est uniformément distribué sur l'intervalle $[-2, 2]$. Sachant que $X > 1$, calculer la probabilité que $X \leq e$.

A) 0.50 B) 0.25 C) 0.75 D) $1 - \frac{2}{e}$ E) $1 - \frac{2}{e^2}$

$\boxed{86}$ Supposons qu'au bal des finissants en actuariat, on choisit au hasard une étudiante et un étudiant pour la première danse. Trouver la probabilité que les deux soient nés à des mois consécutifs. (On suppose que chacun, indépendamment des autres, a une probabilité de $1/12$ d'être né à un mois donné).

A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{11}{72}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{11}{144}$ E) $\frac{1}{6}$

$\boxed{87}$ Soit A et B deux événements indépendants tels que :
$P(A \cup B) = 0.88$ et $P(A \cup B^c) = 0.72$. Trouver $P(B^c|A^c)$.

A) 0.50 B) 0.42 C) 0.40 D) 0.30 E) 0.12

$\boxed{88}$ Le nombre N de réclamations est une variable aléatoire discrète prenant les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, et telle $P(N = n) = a - (0.02)n$, pour n = 0, 1, 2, 3, 4, où a est une constante. Trouver la probabilité qu'il y ait 3 réclamations, sachant qu'il y en a eu au moins deux.

A) 0.200 B) 0.250 C) 0.300 D) 0.333 E) 0.400

$\boxed{89}$ La variable aléatoire discrète N est telle que $P(N = n) = p_n$ $(n \geq 0)$ satisfasse à la récurrence $np_n = 2p_{n-1}$ pour $n \geq 1$. Trouver $E[N]$.

A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) 3

$\boxed{90}$ France désire un café venant d'une machine distributrice très défectueuse. La machine verse un café avec probabilité 0.3 et un lait au chocolat (que France déteste !) avec probabilité 0.7, et ce indépendamment de ce que l'on demande. Trouver l'espérance du nombre de laits au chocolat que France obtiendra avant son fameux café.

A) 2 B) 1 C) $\frac{5}{3}$ D) $\frac{7}{3}$ E) $\frac{10}{3}$