EXAMEN INTRA (4/4), ACT 2121

ARTHUR CHARPENTIER

Les calculatrices sont autorisées. Les documents sont en revanche interdits.

Il y a 25 questions. Sur la feuille jointe, veuillez reporter vos réponses (une unique réponse par question)

- vous gagnez 1 points par bonne réponse
- vous gagnez 0 point par mauvaise réponse
- vous perdez 1 point par non réponse

Aucune justification n'est demandée.

Votre note finale est le total des points (sur 25).

Il y a 11 pages dans cet énoncé, merci de vérifier que le nombre de pages correspond, avant de débuter.

$\boxed{1}$ Soit X une variable aléatoire continue de fonction de densité $f_X(x) = e^{-x}$ pour $x \geq 0$. Soit Y le variable aléatoire discrète, $Y = 1, 2, 3, ...$, définie par $Y =$ le plus petit entier plus grand que X (c'est-à-dire la partie entière de X plus 1). Trouver $P(Y = y) = p_y$.

A) $1 - e^{-y}$ B) $e^{-y}(e-1)$ C) $e^{-y}(1-e^{-1})$ D) e^{-y} E) e^{-y+1}

$\boxed{2}$ Une compagnie d'assurance détermine que le nombre de réclamations durant une semaine N est tel que $\mathrm{P}(N = n) = k/2^n, n \geq 0$, où k est une constante. Trouver la fonction génératrice des moments du nombre d'accidents durant 4 semaines consécutives (on suppose l'indépendance d'une semaine à l'autre).

A) $4(2-e^t)^{-1}$ B) $3^2(2-e^t)^{-4}$ C) $(2-e^t)^{-4}$ D) $2(1-e^t)^{-1}$ E) $\dfrac{(1-e^t)^{-4}}{32}$

$\boxed{3}$ Soit Y la somme de deux variables aléatoire continues indépendantes de même fonction de densité $f_X(x) = 2e^{-2x},\ x > 0$. Trouver la série génératrice des moments de Y.

A) $\dfrac{4}{4+4t+t^2}$ B) $\dfrac{4}{4-t}$ C) $\dfrac{1}{(1-2t)^2}$ D) $\dfrac{1}{1-2t}$ E) $\dfrac{4}{4-4t+t^2}$

$\boxed{4}$ Soit X une variable aléatoire continue dont la fonction de répartition est :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{x}{8} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{x^2}{16} & \text{si} \quad 2 \leq x \leq 4 \\ 1 & \text{si} \quad x > 4. \end{cases}$$

Calculer $\mathrm{Var}(X-1)+1$.

A) 2.76 B) 2.56 C) 2.36 D) 2.16 E) 1.96

$\boxed{5}$ Si $\mathrm{P}(A) = \dfrac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B) = \dfrac{1}{2}$ et $\mathrm{P}(A|B) + \mathrm{P}(B|A) = \dfrac{5}{9}$, alors que vaut $\mathrm{P}(A \cap B)$?

A) $\dfrac{1}{36}$ B) $\dfrac{1}{12}$ C) $\dfrac{1}{9}$ D) $\dfrac{1}{6}$ E) $\dfrac{1}{3}$

$\boxed{6}$ La durée de vie du chien Rex est distribuée uniformément sur l'intervalle $[0, 20]$ alors que la durée de vie du chien Fido est de loi exponentielle. On suppose que les deux durées de vie sont indépendantes et de même moyenne. Trouver la probabilité que Fido meure avant Rex.

A) 0.412 B) 0.450 C) 0.499 D) 0.543 E) 0.568

$\boxed{7}$ Soit A et B deux événements. On sait que : (i) $\mathrm{P}((A \cup B)^c) = 3\mathrm{P}(A \cap B)$; (ii) $\mathrm{P}(A) = 2\mathrm{P}(B)$; (iii) $\mathrm{P}(A \cap B^c) = 6\mathrm{P}(A \cap B)$. Trouver $\mathrm{P}(B)$.

A) 7/50 B) 7/25 C) 3/10 D) 7/20 E) 14/25

$\boxed{8}$ Soit X et Y des variables aléatoires de fonction de densité conjointe $f_{X,Y}(x,y) = 4x$ pour $0 < x < 1$ et $0 < x^2 < y < 1$. Trouver la fonction de densité de la loi marginale de Y.

A) $2(1-y)$ B) $2y$ C) $3y^2$ D) $\frac{2}{3}\sqrt{y}$ E) 1

$\boxed{9}$ Soit X une variable aléatoire continue de fonction de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} 2(3-2x)/5 & \text{pour } 0 \leq x \leq 1 \\ 2(2-x)/5 & \text{pour } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Trouver la médiane de X.

A) 0.33 B) 0.40 C) 0.50 D) 0.67 E) 0.80

$\boxed{10}$ Soit X une variable aléatoire continue de fonction de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \\ x/4 & \text{pour } 0 \leq x \leq 2 \\ 4/x^3 & \text{pour } x > 2 \end{cases}$$

Trouver $P(1 < X < 4 \mid X > 1)$.

A) $\frac{2}{7}$ B) $\frac{3}{7}$ C) $\frac{6}{7}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{5}{7}$

$\boxed{11}$ Pour une police d'assurance le nombre de réclamations est $N = 0, 1$ ou 2, avec probabilités $0.5, 0.3$ et 0.2 respectivement. On a l'information suivante : $\mathrm{E}[S|N = 0] = 0$, $\mathrm{V}ar[S|N = 0] = 0$, $\mathrm{E}[S|N = 1] = 10$, $\mathrm{Var}[S|N = 1] = 5$, $\mathrm{E}[S|N = 2] = 20$, $\mathrm{Var}[S|N = 2] = 8$. Trouver la variance de S.

A) 3.1 B) 31 C) 61 D) 64.1 E) 85

$\boxed{12}$ La fonction de densité de la loi marginale de X est $f_X(x) = (1/4)(x + 1)$, $0 < x < 2$. La fonction de densité de la loi conditionnelle de $Y|X = x$ est

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{x + y}{2(x + 1)}, \ 0 < y < 2.$$

Trouver la fonction de densité de la loi marginale de Y.

A) $\dfrac{2 + y}{4}$ B) $\dfrac{1}{2}$ C) $\dfrac{1 + y}{4}$ D) $\dfrac{y}{2}$ E) $\dfrac{3y^2}{8}$

$\boxed{13}$ Pour un conducteur automobile, les accidents peuvent résulter en des pertes de 0, 1 000, 5 000, 10 000, ou, 15 000, avec des probabilités respectives de 0.75, 0.12, 0.08, 0.04, et, 0.01. Un assureur offre une police qui rembourse la perte mais sujette à un déductible de 500 et un (remboursement) maximum de 12 000. L'assureur fixe la prime à 10% de plus que l'espérance de la perte du conducteur. Trouver la prime chargée par l'assureur.

A) 1 012 B) 1 177 C) 1 098 D) 1 205 E) 1 291

$\boxed{14}$ Soit $F_X(x) = 1 - e^{-x}/2$ pour $x \geq 0$ et $F_X(x) = 0$ pour $x < 0$.

Trouver la série génératrice des moments $M_X(t)$ de X.

A) $\dfrac{1}{1-t}$ B) $\dfrac{1}{2-2t}$ C) $\dfrac{2-t}{2-2t}$ D) $\dfrac{1}{2t} + \dfrac{1}{2(1+t)}$ E) n'existe pas

$\boxed{15}$ Un actuaire a modélisé les dépenses hospitalières d'une police d'assurance par une variable aléatoire X de fonction de densité :

$$f_X(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \quad \text{pour } x > 0.$$

Si les dépenses augmentent de 20% et que Y représente la nouvelle valeur des dépenses hospitalières, trouver la fonction de répartition $F_Y(y)$ de Y.

A) $\dfrac{2}{\left(\frac{5}{6}y+1\right)^3}$ B) $\dfrac{5}{3\left(\frac{5}{6}y+1\right)^3}$ C) $\dfrac{12}{5\left(\frac{6}{5}y+1\right)^3}$

D) $\dfrac{25y^2+60y}{25y^2+60y+36}$ E) $\dfrac{36}{25y^2+60y+36}$

$\boxed{16}$ Soit X_1, X_2, X_3, X_4 des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. Trouver la probabilité que le troisième nombre (en ordre croissant de grandeur), ou en d'autres mots $X_{(3)}$, soit entre 1/4 et 1/2.

A) 0.140 B) 0.156 C) 0.188 D) 0.211 E) 0.262

$\boxed{17}$ Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 40]$. On définit X et Y deux nouvelles variables aléatoires sur l'intervalle $[0, 40]$ par :

$$X = \begin{cases} 2U & \text{si } 0 < U \leq 20 \\ 0 & \text{si } 20 < U \leq 40 \end{cases} \quad \text{et} \quad Y = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < U \leq 20 \\ 2U & \text{si } 20 < U \leq 40. \end{cases}$$

Calculer $\text{Var}(X + Y)$.

A) 253 B) 347 C) 419 D) 533 E) 645

$\boxed{18}$ Supposons que 20 nombres réels sont choisis uniformément et indépendamment sur l'intervalle $[0, 1]$. Trouver une approximation de la probabilité que la somme des 20 nombres soit inférieure à 8.

A) 0.06 B) 0.10 C) 0.14 D) 0.18 E) 0.22

$\boxed{19}$ Trouver le 90ième percentile de la variable aléatoire X de fonction de densité :

$$f_X(x) = \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}} \text{ pour } x > 0.$$

A) 0.32 B) 2.08 C) 2.77 D) 4.16 E) 6.91

$\boxed{20}$ Soit X une variable aléatoire dont la série génératrice des moments est :

$$M_X(t) = (1 - 10t + 25t^2)^{-2}.$$

Trouver $\text{Var}[X]$.

A) 25 B) 50 C) 250 D) 150 E) 100

$\boxed{21}$ Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ (3x+2)/12 & 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

Trouver $\mathrm{E}[X]$.

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{7}{6}$ C) 1 D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{4}{3}$

$\boxed{22}$ Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes. Supposons que X est de loi de Poisson de paramètre 3 et que la variable conditionnée $Y|X = x$ suit aussi une loi de Poisson, cette fois de paramètre $3x$. Trouver la variance de Y.

A) 36 B) 33 C) 30 D) 27 E) 9

$\boxed{23}$ Soit X, Y et Z trois variables aléatoires indépendantes dont la distribution est la même, soit $p(x) = 1/2$ pour $x = 0$ et $p(x) = 1/2$ pour $x = 1$. Trouver la fonction génératrice des moments de $U = X^2Y^2Z^2$.

A) $\frac{7e^t+1}{8}$ B) $\frac{1+e^t}{8}$ C) $\frac{7+e^t}{8}$ D) $1+\frac{1}{8}e^t$ E) $\left(\frac{e^t+1}{2}\right)^{3/2}$

$\boxed{24}$ Dans un examen de classement suivi par des milliers de personnes, la note d'un étudiant pris au hasard suit une loi normale de moyenne 65 et variance 100. Les correcteurs décident du barème suivant :

$$[85, 100] \to A; \quad [75, 85] \to B; \quad [60, 75] \to C; \quad [50, 60] \to D; \quad [0, 50] \to E.$$

Trouver la probabilité qu'un étudiant pris au hasard ait obtenu la note B.

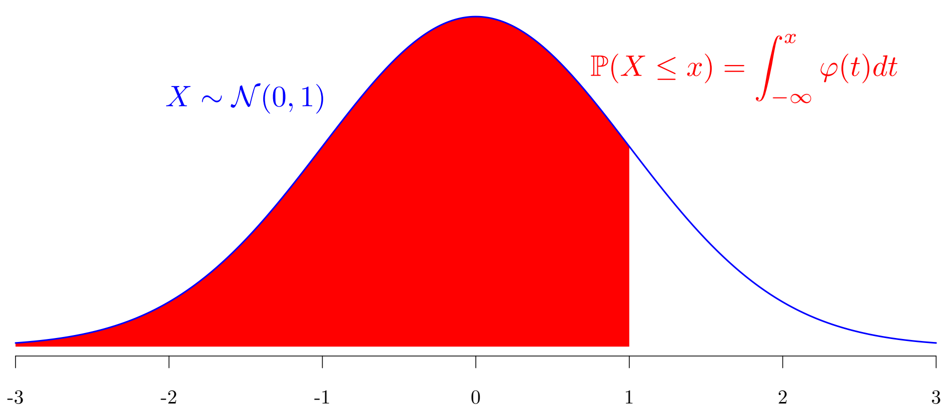
A) 0.094 B) 0.184 C) 0.231 D) 0.124 E) 0.1359

$\boxed{25}$ La perte X d'un assuré suit une loi uniforme sur l'intervalle [0, 100]. Trouver le déductible d qu'il faut imposer pour que la variance du remboursement soit de 69.75. (12)

A) 85 B) 80 C) 75 D) 70 E) 65

Table de la loi normale La table suivante donne les valeurs de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite,

$$\Phi(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt \text{ où } \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) du$$



	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990