EXAMEN INTRA (3/4), ACT 2121

ARTHUR CHARPENTIER

Les calculatrices sont autorisées. Les documents sont en revanche interdits.

Il y a 25 questions. Sur la feuille jointe, veuillez reporter vos réponses (une unique réponse par question)

- vous gagnez 1 points par bonne réponse
- vous gagnez 0 point par mauvaise réponse

Aucune justification n'est demandée.

Votre note finale est le total des points (sur 25).

Les éléments de réponse sont donnés à titre indicatif, pour justifier la réponse. Des statistiques sur les différentes réponses sont mentionnées pour chaque question.

$\boxed{1}$ La fonction de densité de la loi marginale X est $f_X(x) = x + \dfrac{1}{2}$, $0 < x < 1$. La fonction de densité de la loi conditionnelle $Y|X = x$ est $f_{Y|X=x}(Y|X = x) = \dfrac{x+y}{x+\frac{1}{2}}$, $0 < y < 1$. Trouver la fonction de densité de la loi marginale Y.

A) $\dfrac{1}{2} + y$ B) $\dfrac{x+y}{y+\frac{1}{2}}$ C) $1 + y$ D) y E) $3y^2$

On va utiliser la formule des probabilités totales, qui nous dit que

$$f_Y(y) = \int f_{X,Y}(x,y)dx = \int f_{Y|X}(y|x)f_X(x)dx$$

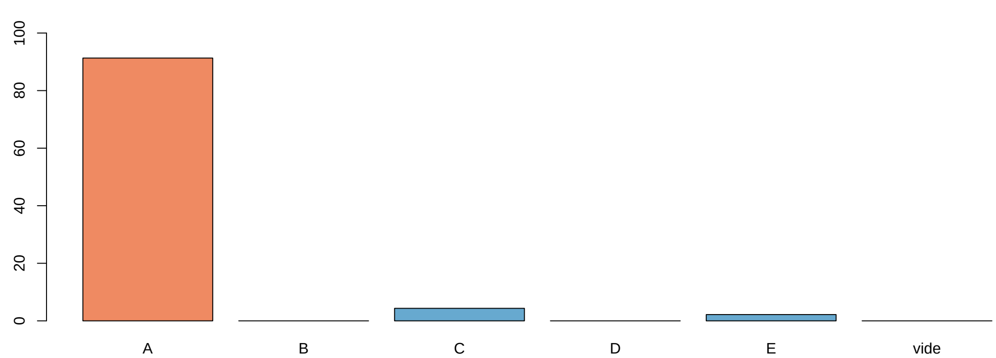
(en utilisant ensuite la formule de Bayes). Aussi, pour tout $y \in [0,1]$, comme le couple (X,Y) prend ses valeurs sur l'ensemble du carré unité $[0,1] \times [0,1]$

$$f_Y(y) = \int_0^1 \frac{x+y}{x+\frac{1}{2}} \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) dx$$

soit

$$f_Y(y) = \int_0^1 [x+y]dx = y + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = y + \frac{1}{2}$$

On note qu'il s'agit bien d'une densité sur $[0,1]$ puisque cette fonction est positive, et s'intègre à 1. Bref, on retient la réponse A.



$\boxed{2}$ Soit X et Y des variables aléatoires continues de loi conjointe :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{si } 0 < x < 1,\ y > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver $\text{Var}[X|Y = y]$.

A) $\dfrac{1}{12}$ B) y^2 C) 1 D) $\dfrac{y}{12}$ E) e^{-y}

On a un couple de variables qui prend ses valeurs sur $[0,1] \times [0,\infty)$. On notera même que la densité s'écrit

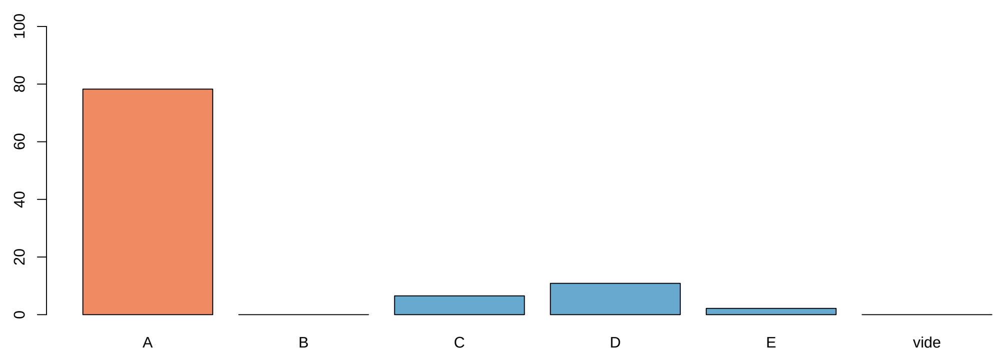
$$f_{X,Y}(x,y) = \underbrace{\mathbf{1}(x \in [0,1])}_{\text{densité de } X} \cdot \underbrace{e^{-y}\mathbf{1}(y \in [0,\infty))}_{\text{densité de } Y}$$

Bref, on a plusieurs choses : l'indépendence entre les deux variables aléatoires, et leurs lois. En particulier, X suit une loi uniforme sur l'intervalle unité. De la première on en déduit que la loi de X sachant Y ne dépend pas de la valeur de Y. En particulier, $\text{Var}(X|Y = y) = \text{Var}(X)$. Et de la seconde, on en déduit que cette variance est $1/12$. On retient la réponse A.

Pour ceux qui se sente rassurer en faisant des calculs, trouver la variance conditionnelle, le plus simple est de trouver l'expression de la loi conditionnelle, puis de calculer ses moments. D'après la formule de Bayes,

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{\int_{[0,1]} f_{X,Y}(u,y)dy}$$

(en utilisant pour le terme de droite la formule des probabilités totales). Bon, en fait ça ne m'amuse pas de faire les calculs, mais ça se fait.



$\boxed{3}$ Soit X et Y deux variables aléatoires continues de fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} (0.32)\ e^{-(0.8)x\ -(0.4)y} & \text{pour } 0 \leq x \text{ et } 0 \leq y \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver $E[Y - X]$.

A) -0.4 B) -1.25 C) 1.25 D) 0.32 E) 0.4

Là encore, les variables sont indépendantes, et suivent des lois exponentielles, puisque

$$f_{X,Y}(x,y) = \underbrace{0.8e^{-(0.8)x}\mathbf{1}(x \in [0,\infty))}_{\text{densité de } X} \cdot \underbrace{0.4e^{-(0.4)y}\mathbf{1}(y \in [0,\infty))}_{\text{densité de } Y}$$

L'indépendance ne va pas vraiment nous servir, car l'espérance est un opérateur linéaire. Aussi $\mathbb{E}[Y - X] = \mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[X]$. Par contre, le fait d'avoir reconnu des lois exponentielles va nous aider ici. Rappelons que X a pour moyenne 0.8^{-1}, et que Y a pour moyenne 0.4^{-1}. Bref,

$$\mathbb{E}[Y - X] = \frac{10}{4} - \frac{10}{8} = \frac{10-5}{4} = \frac{5}{4}$$

qui est la réponse C.

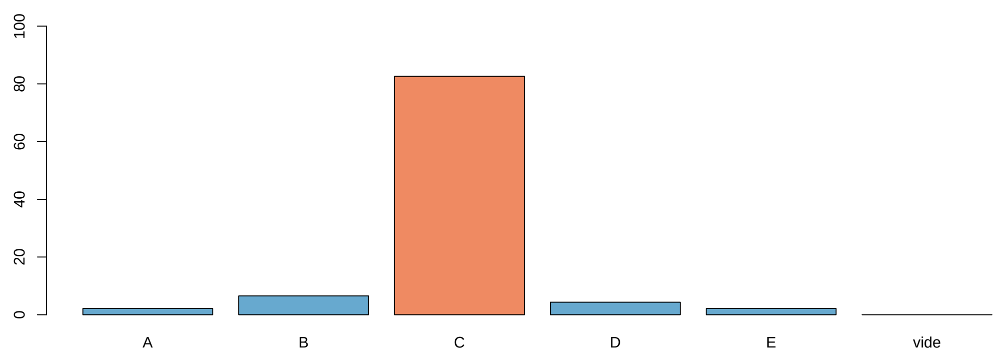
Là encore, on peut aussi faire des (gros) calculs, en notant que, de manière générale,

$$\mathbb{E}[g(X,Y)] = \int\int g(x,y) f_{X,Y}(x,y) dx dy,$$

soit ici

$$\mathbb{E}[Y-X] = \int_0^\infty \int_0^\infty [y-x](0.32)\, e^{-(0.8)x\ -(0.4)y} dx dy,$$

Là encore, il faut faire des calculs... Bon courage... (ce n'est pas un cours de calculs mais de probabilités, donc si on peut les éviter, on les évite !)



$\boxed{4}$ Soit X et Y des variables aléatoires continues de fonction de densité conjointe $f_{X,Y}(x,y) = 4x$ pour $0 < x < \sqrt{y} < 1$. Trouver la fonction de densité de la marginale Y.

A) $2y$ B) $2y^2$ C) y^2 D) $\sqrt{y}$ E) $4\sqrt{y}$

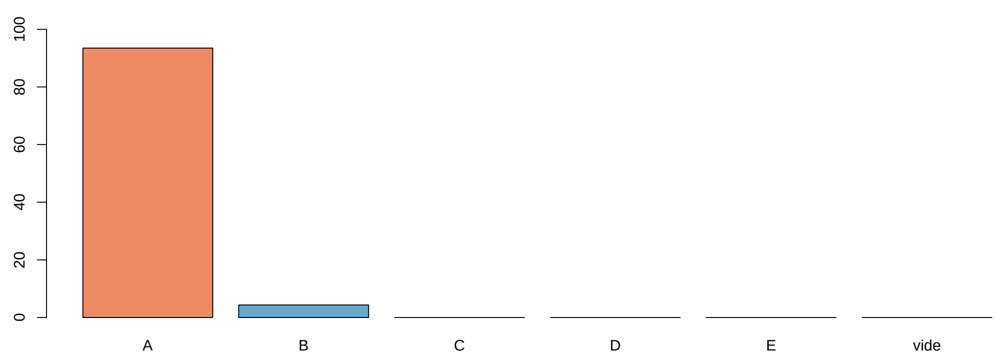
Cette fois, les lois ne sont plus indépendantes. Mais la formule des probabilités totales marche toujours. Pour tout $y \in [0,1]$

$$f_Y(y) = \int f_{X,Y}(x,y)dx = \int_0^{\sqrt{y}} 4xdx = 2\left[x^2\right]_0^{\sqrt{y}}$$

soit tout simplement

$$f_Y(y) = 2y$$

qui est la réponse A. Encore une fois, cette loi est effectivement une densité, qui est positive et qui s'inègre à 1. On notera que plusieurs autres réponse ne sont même pas des densités (sur l'intervalle unité).



$\boxed{5}$ Soit X une variable aléatoire telle que :

$$M_X(t) = \frac{1}{5}\left(e^{-2t} + e^{-t} + 1 + e^t + e^{2t}\right).$$

Trouver $P(X \geq 0 \mid X \neq 1 \text{ ou } -1)$.

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{2}{3}$

On nous donne la fonction génératrice des moments. Rappelons que

$$M_X(t) = \sum_x e^{tx} \mathbb{P}(X = x)$$

ici, on observe que

$$M_X(t) = \sum_{x \in \{-2,-1,0,1,2\}} e^{tx} \frac{1}{5}$$

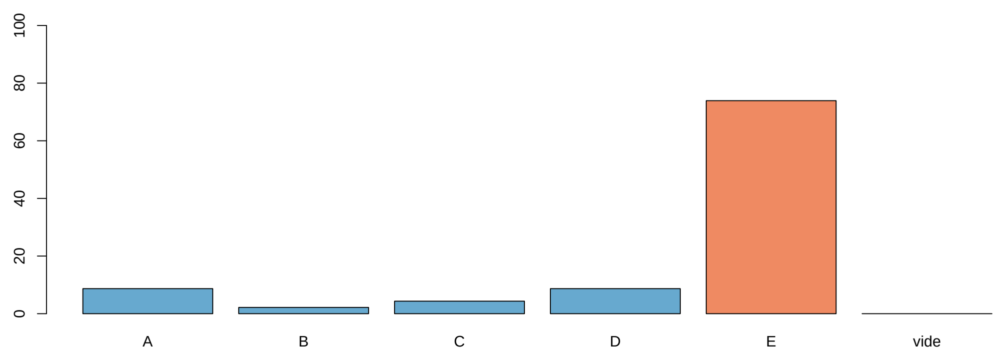
Bref, X prend ces 5 valeurs de manière équiprobable. Donc ici, on veut calculer

$$\mathbb{P}(X \in \{0,1,2\} | X \in \{-2,0,2\}) = \frac{\mathbb{P}(X \in \{0,1,2\} \cap \{-2,0,2\})}{\mathbb{P}(X \in \{-2,0,2\})}$$

soit ici

$$\mathbb{P}(X \in \{0,1,2\} | X \in \{-2,0,2\}) = \frac{\mathbb{P}(X \in \{0,2\})}{\mathbb{P}(X \in \{-2,0,2\})} = \frac{2/5}{3/5} = \frac{2}{3}$$

qui est la réponse E.



$\boxed{6}$ Soit X, Y, Z trois variables aléatoires discrètes de distribution simultanée :

$$f_{X,Y,Z}(x,y,z) = \frac{xyz}{108} \quad \text{pour} \quad x = 1,2,3\,; \quad y = 1,2,3\,; \quad z = 1,2.$$

Trouver la distribution conjointe de Y, Z sachant $X = 3$.

A) $\dfrac{yz}{108}$ B) $\dfrac{yz}{36}$ C) $\dfrac{yz}{18}$ D) $\dfrac{yz}{9}$ E) $\dfrac{yz}{3}$

C'est toujours pareil. On peut facilement écrire la fonction de probabilité comme un produit de fonction de probabilités, ce qui va nous donner l'indépendance, et les loi marginales (et finalement les lois des couples aussi), et $\mathbb{P}(X = x, Y = y, Z = z)$ s'écrit

$$\underbrace{\frac{x}{1+2+3}\mathbf{1}(x \in \{1,2,3\})}_{\text{f.d.p. de } X}\underbrace{\frac{y}{1+2+3}\mathbf{1}(y \in \{1,2,3\})}_{\text{f.d.p. de } Y}\underbrace{\frac{x}{1+2}\mathbf{1}(z \in \{1,2\})}_{\text{f.d.p. de } Z}$$

et ça marche car $6 \times 6 \times 3 = 108$. Par indépendance, la loi du couple (Y, Z) est alors (peu importe X)

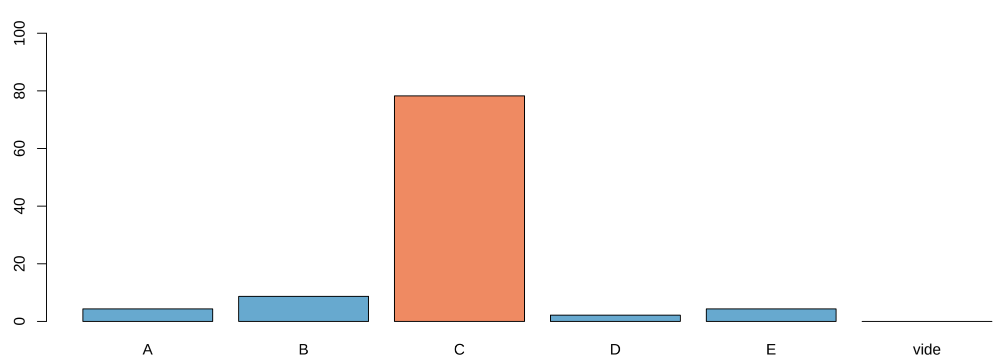
$$\mathbb{P}(Y = y, Z = z) = \underbrace{\frac{y}{1+2+3}\mathbf{1}(y \in \{1,2,3\})}_{\text{f.d.p. de } Y}\underbrace{\frac{x}{1+2}\mathbf{1}(z \in \{1,2\})}_{\text{f.d.p. de } Z} = \frac{yz}{18}$$

qui est la réponse C.

Sinon, on peut faire des calculs, et utiliser la formule de Bayes, et la formule des probabilités totales (qui sont finalement les deux seules formules que l'on utilise en permanence),

$$\mathbb{P}(Y = y, Z = z | X = 3) = \frac{\mathbb{P}(Y = y, Z = z, X = 3)}{\sum_{y,z} \mathbb{P}(Y = y, Z = z, X = 3)}$$

etc.



$\boxed{7}$ Soit X et Y deux v.a. discrètes dont la distribution conjointe est donnée par le tableau :

		X		
		0	1	2
Y	0	0.3	0.2	0.1
	1	0.2	0.1	0.1

Trouver le coefficient de corrélation $\rho_{X,Y}$.

A) 0.02 B) 0.052 C) 0.092 D) 0.151 E) 0.252

On se lance... On utilise le fait que

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)}{\sqrt{\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}\sqrt{\mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2}}$$

Reste à calculer toutes les espérances (oui, cette fois, on ne peut pas se passer des calculs, car les variables ne sont pas indépendantes).

$$\mathbb{E}(X) = [0.3 + 0.2] \cdot 0 + [0.2 + 0.1] \cdot 1 + [0.2 + 0.1] \cdot 2 = 0.7$$

$$\mathbb{E}(X^2) = [0.3 + 0.2] \cdot 0^2 + [0.2 + 0.1] \cdot 1^2 + [0.2 + 0.1] \cdot 2^2 = 1.1$$

$$\mathbb{E}(Y) = [0.3 + 0.2 + 0.1] \cdot 0 + [0.2 + 0.1 + 0.1] \cdot 1 = 0.4$$

$$\mathbb{E}(Y^2) = [0.3 + 0.2 + 0.1] \cdot 0^2 + [0.2 + 0.1 + 0.1] \cdot 1^2 = 0.4$$

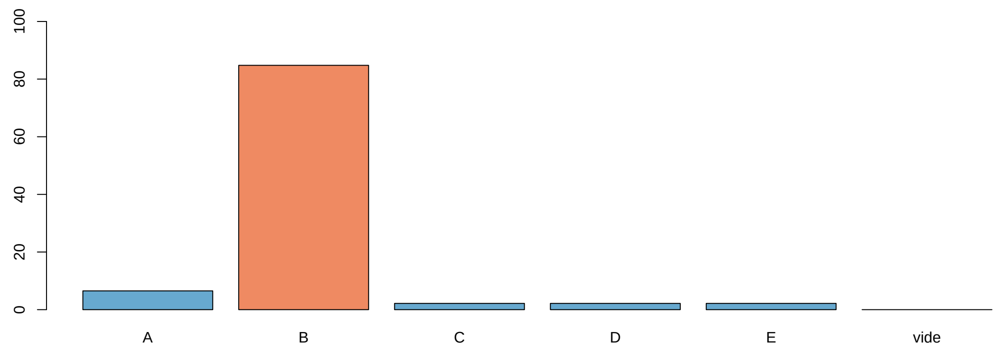
et enfin

$$\mathbb{E}(XY) = [0.3 + 0.2 + 0.1 + 0.2] \cdot 0 + [0.1] \cdot 1 + [0.1] \cdot 2 = 0.3$$

Reste à regrouper toutes ces valeurs

$$\rho_{X,Y} = \frac{0.3 - 0.7 \cdot 0.4}{\sqrt{1.1 - 0.7^2}\sqrt{0.4 - 0.4^2}} \sim 0.052$$

qui correspond à la réponse B.



$\boxed{8}$ Soit X et Y des variables aléatoires continues ayant la fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 15y & \text{pour } 0 \leq x^2 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer la fonction de densité de la variable conditionnée $X|Y = \frac{1}{2}$ pour les valeurs possibles de x.

A) $5(1-\sqrt{x})$ B) $15(x-\sqrt{x})$ C) 1 D) $2x$ E) $\frac{2}{\sqrt{2}-1}$

On est sur une surface un peu tordue, et on n'a clairement pas indépendante entre les variables. On va utiliser la formule de Bayes, et la formule des probabilit'es totales, pour écrire

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{\int f_{X,Y}(u,y)du}$$

en prenant soit d'être à chaque fois sur les bons ensembles. A gauche, si $y = 1/2$ alors $x \in [y, \sqrt{y}]$. Et pour la loi marginale de Y, au dénominateur, il convient d'intégrer précidément sur cet ensemble. Soit ici

$$f_Y(y) = \int_y^{\sqrt{y}} 15y du = 15y \cdot [\sqrt{y} - y].$$

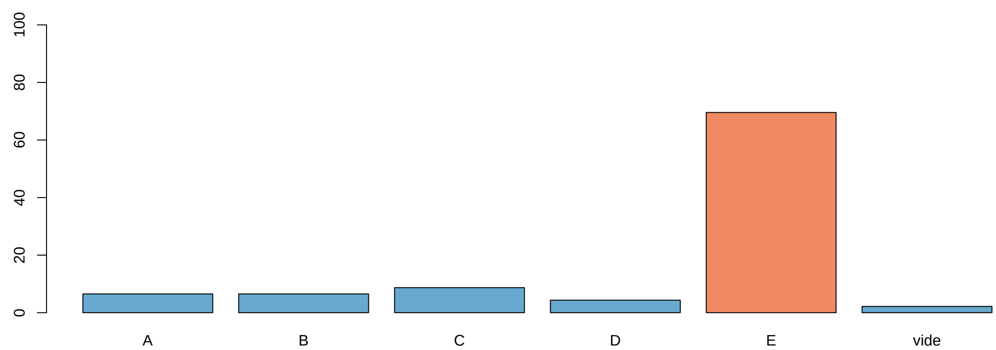
Aussi

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{15y}{15y \cdot [\sqrt{y} - y]} = \frac{1}{[\sqrt{y} - y]}$$

de telle sorte que pour $y = 1/2$, Aussi

$$f_{X|Y}(x|y = 1/2) = \frac{1}{[\sqrt{1/2} - 1/2]} = \frac{2}{[2\sqrt{1/2} - 1]} = \frac{2}{[\sqrt{2} - 1]}$$

qui est la réponse E.



$\boxed{9}$ Soit X et Y deux variables aléatoires telles que pour tout $y > 0$ on a :

$$f_Y(y) = e^{-y}, \quad E[X|Y = y] = 3y \quad \text{et} \quad \text{Var}[X|Y = y] = 2$$

Trouver $\text{Var}[X]$.

A) 20 B) 11 C) 9 D) 5 E) 3

On utilise le fait que

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int \mathbb{E}[g(X)|Y = y] f_Y(y) dy$$

deux fois. Dans un premier temps, on calcule

$$\mathbb{E}[X] = \int \mathbb{E}[X|Y=y] f_Y(y)dy = \int_0^\infty 3ye^{-y}dy = 3$$

(les bornes viennent de la précision $y > 0$), et

$$\mathbb{E}[X^2] = \int \mathbb{E}[X^2|Y=y] f_Y(y)dy = \int \left(\mathbb{E}[X|Y=y]^2 + \text{Var}[X|Y=y]\right) f_Y(y)dy$$

soit

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^\infty \left([3y]^2 + 2\right) e^{-y}dy = \cdots = 20$$

Aussi

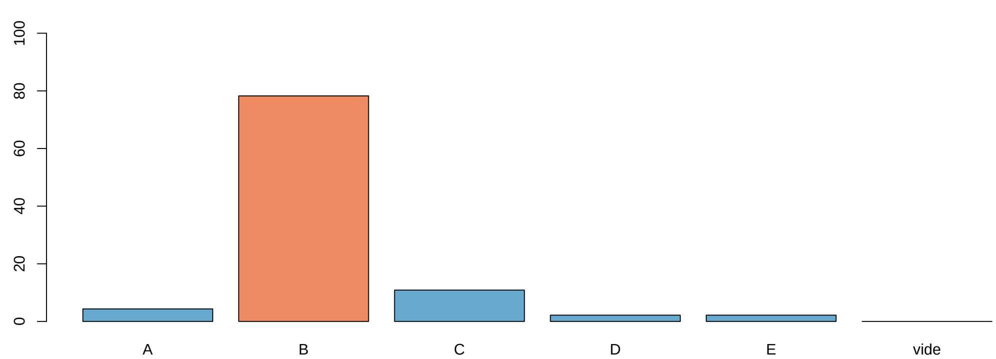
$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = 20 - 3^2 = 11,$$

qui est la réponse B. On peut aussi noter que Y suit une loi exponentielle de moyenne et de variance 1. La formule de décomposition de la variance. En effet,

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[\text{Var}(X|Y)] + \text{Var}(\mathbb{E}[X|Y])$$

Comme on connait les moments conditionnels et qu'on a noté que Y suivait une loi exponentielle de paramètre 1, on va y arriver. En effet,

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[2] + \text{Var}(3Y) = 2 + 3^2 \underbrace{\text{Var}(Y)}_{1} = 2 + 9 = 11.$$



$\boxed{10}$ Pour une assurance, la perte X (en milliers de dollars) suit une loi de fonction de densité $f_X(x) = \frac{3x^2}{8}$ pour $0 \leq x \leq 2$. Si le temps (en heures) pour traiter la réclamation pour une perte $0 \leq x \leq 2$ est uniformément distribué entre x et $2x$, calculer la probabilité que ça prenne plus de 3 heures pour traiter une réclamation aléatoire.

A) $\dfrac{29}{64}$ B) $\dfrac{23}{64}$ C) $\dfrac{17}{64}$ D) $\dfrac{11}{64}$ E) $\dfrac{5}{64}$

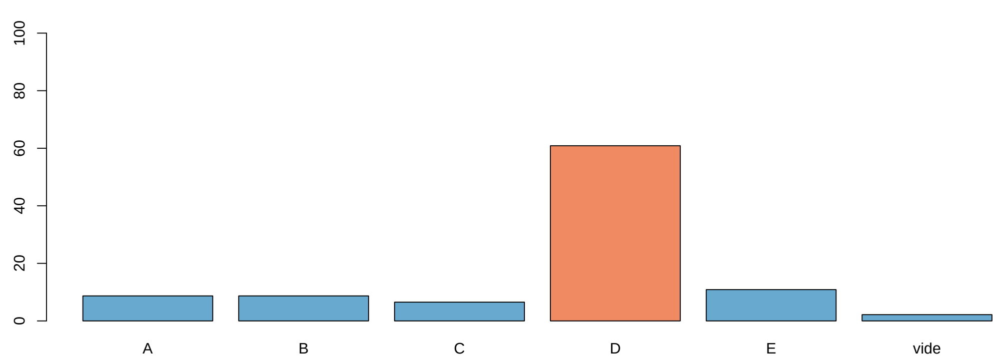
On nous dit que T sachant $X = x$ suit une loi uniforme sur $[x, 2x]$, et on nous donne la densité de X, donc

$$\mathbb{P}(T > t) = \int \mathbb{P}(T > t|X = x) f_X(x) dx$$

en utilisant la formule des probabilités totales. Et ici x prend ses valeurs entre 0 et 2 (par hypothèse). Donc (comme ici t excède la borne supérieure du support de X)

$$\mathbb{P}(T > t) = \int_0^2 \frac{\mathbf{1}(3x > t)}{3x - t} \frac{3x^2}{8} dx = \int_{t/3}^2 \frac{1}{3x - t} \frac{3x^2}{8} dx$$

En finissant le calcul de l'intégrale, on obtient $11/64$, qui est la réponse D.



$\boxed{11}$ Soit X et Y des variables aléatoires continues de loi de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{4}x & \text{pour } 0 < x < 2 \text{ et } 0 < y < 2-x \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver $P(X < 1)$.

A) $\dfrac{7}{8}$ B) $\dfrac{3}{4}$ C) $\dfrac{5}{8}$ D) $\dfrac{1}{2}$ E) $\dfrac{1}{4}$

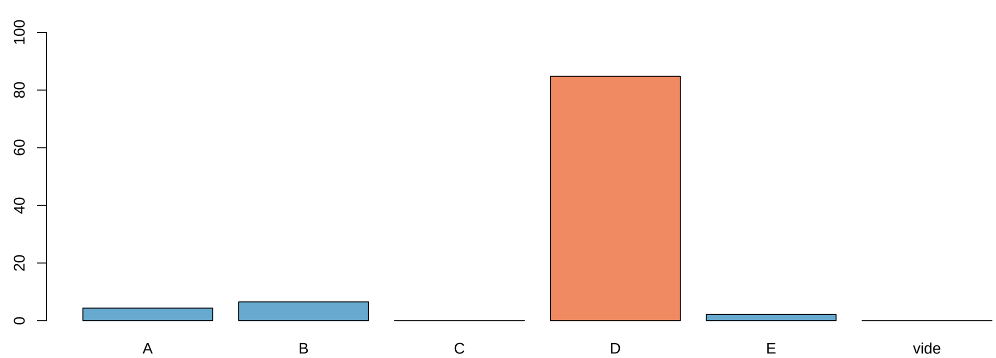
Les variables ne sont pas ici indépendantes, donc on va encore utiliser la formule des probabilités totales, en notant que

$$\mathbb{P}(X < 1) = \int_0^1 f_X(x)dx = \int_0^1 \int f_{X,Y}(x,y)dydx$$

i.e.

$$\mathbb{P}(X < 1) = \int_0^1 \int_0^{2-x} \frac{3}{4}xdydx = \left[\frac{3}{4}x^2 - \frac{x^3}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

qui est la réponse D.



$\boxed{12}$ Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $M_X(t) = e^{t^2+2t}$ et $M_Y(t) = e^{3t^2+t}$. Trouver la série génératrice des moments de $3X + Y$.

A) e^{12t^2+7t} B) $3e^{4t^2+3t}$ C) $3e^{t^2+2t}+e^{3t^2+t}$ D) $e^{9t^2+6t}+e^{3t^2+t}$ E) e^{6t^2+7t}

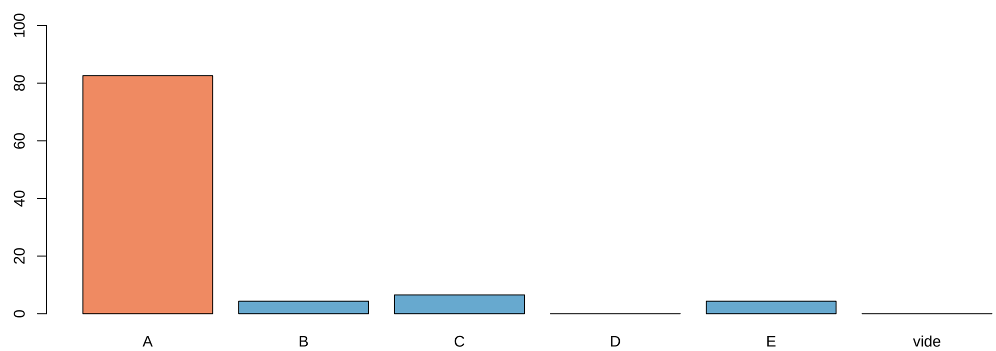
Il suffit d'écrire

$$M_{3X+Y}(t) = \mathbb{E}(e^{t[3X+Y]}) = \mathbb{E}(e^{t[3X]}) \cdot \mathbb{E}(e^{t[Y]}) = \mathbb{E}(e^{[3t]X]}) \cdot \mathbb{E}(e^{t[Y]})$$

par indépendance, et donc $M_{3X+Y}(t) = M_X(t)^3 \cdot M_Y(t)$. Aussi

$$M_{3X+Y}(t) = \left(e^{(3t)^2+2(3t)}\right) \cdot e^{3t^2+t} = e^{(9t^2+6t)+(3t^2+t)} = e^{12t^2+7t}.$$

On retrouve la réponse A. Cela dit, comme on a forcément $M_{3X+Y}(0) = 1$, il fallait exclure d'emblée B, C, et D. Ce qui faisait que, sans faire aucun calcul, seules deux réponses étaient possibles !



$\boxed{13}$ Soit X une variable aléatoire de type exponentielle de moyenne m et Y une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle $[0, m]$. En supposant X et Y indépendantes, trouver la série génératrice des moments de $X + Y$.

A) $\dfrac{e^{mt}-1}{1-m^2t^2}$ B) $\dfrac{e^{mt}-1}{mt(1-mt)}$ C) $\dfrac{e^{mt}}{mt-m^2t^2}$ D) $\dfrac{e^{mt}}{1-mt}$ E) $\dfrac{1-mt}{e^{mt}}$

On utilise le fait que si les variables sont indépendantes, la fonction génératrice des moments de la somme est le produit des deux fonctions génératrices des moments. Pour une loi exponentielle,

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^t X) = \int e^{tx} \frac{e^{-x/m}}{m} dx = (1 - mt)^{-1}$$

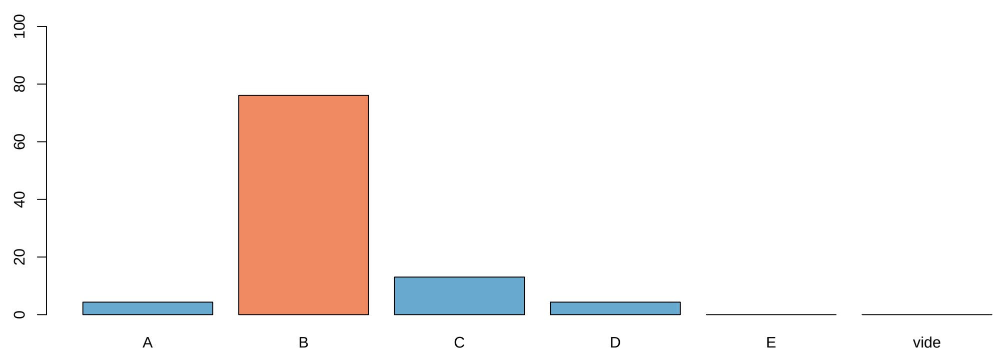
et pour la loi uniforme

$$M_Y(t) = \mathbb{E}(e^t Y) = \int_0^m \frac{1}{m} \frac{e^{-x/m}}{m} dx = \frac{e^{tm} - 1}{tm}$$

(oui, je ne connais pas les fonctions génératrices des moments par coeur...). Quand on fait le produit, on obtient

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t) = \frac{e^{tm} - 1}{tm + m^2 t^2}$$

qui est la réponse B.



$\boxed{14}$ Soit X et Y deux variables aléatoires continues de fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3}{4}(2 - x - y) & \text{pour } 0 < x < 2 \ , \ 0 < y < 2 \ , \ x + y < 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver la probabilité conditionnelle $P(X < 1 \mid Y < 1)$.

A) $\dfrac{1}{2}$ B) $\dfrac{3}{4}$ C) $\dfrac{49}{64}$ D) $\dfrac{6}{7}$ E) $\dfrac{7}{8}$

On va utiliser le fait que

$$\mathbb{E}[g(X,Y)] = \int\int g(x,y) f_{X,Y}(x,y)dxdy$$

avec ici deux fonctions possibles $g(x,y) = \mathbf{1}(X < 1, Y < 1)$ et $g(x,y) = \mathbf{1}(Y < 1)$. La probabilité conditionnelle sera alors le ratio des deux intégrales.

Pour le dénominateur,

$$\mathbb{P}(Y < 1) = \int_0^1 \int_0^{2-y} \frac{3}{4}(2-x-y)dxdy = \cdots = \frac{7}{8}$$

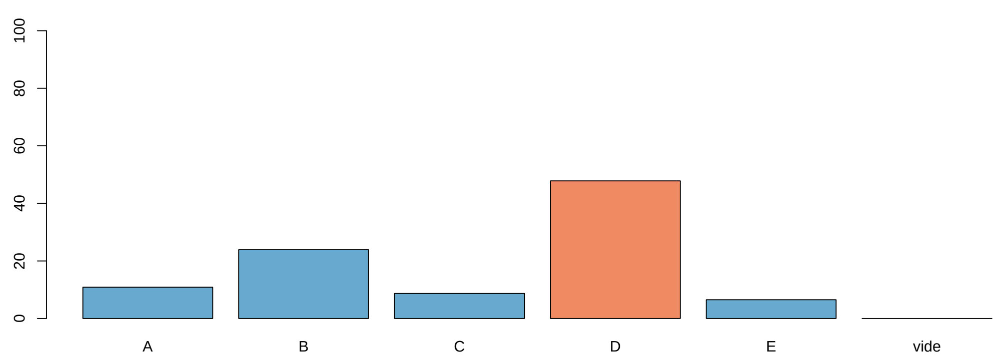
et pour le numérateur

$$\mathbb{P}(X < 1, Y < 1) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{3}{4}(2-x-y)dxdy = \cdots = \frac{3}{7}$$

(je passe un peu les calculs, qui n'ont pas grand intérêt...ce sont juste des calculs d'intégrales, comme on en a fait plusieurs en cours), et donc

$$\mathbb{P}(X < 1|Y < 1) = \frac{3/4}{7/8} = \frac{6}{7},$$

qui est la réponse D.



$\boxed{15}$ Toutes les réclamations sont de montants égaux à 2 et le nombre N de réclamations suit une loi de Poisson de paramètre Λ. Cependant Λ est lui-même aléatoire et suit une loi exponentielle de moyenne 2.
Trouver la variance de la réclamation totale $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$.

A) 24 B) 12 C) 8 D) 6 E) 4

On nous dit que N sachant $\Lambda = \lambda$ suit une loi de Poisson, de paramètre λ, et Λ suit une loi exponentielle de moyenne 2. On nous dit aussi que les X_i sont des constantes, qui valent 2. Aussi $S = 2 \cdot N$. Bref, $\text{Var}(S) = 4 \cdot \text{Var}(N)$. Pour trouver $\text{Var}(N)$, on utilise le théorème de Pythagore (connu en statistique sous le nom '*décomposition de la variance*'),

$$\text{Var}(N) = \text{Var}(\mathbb{E}(N|\Lambda)) + \mathbb{E}(\text{Var}(N|\Lambda)).$$

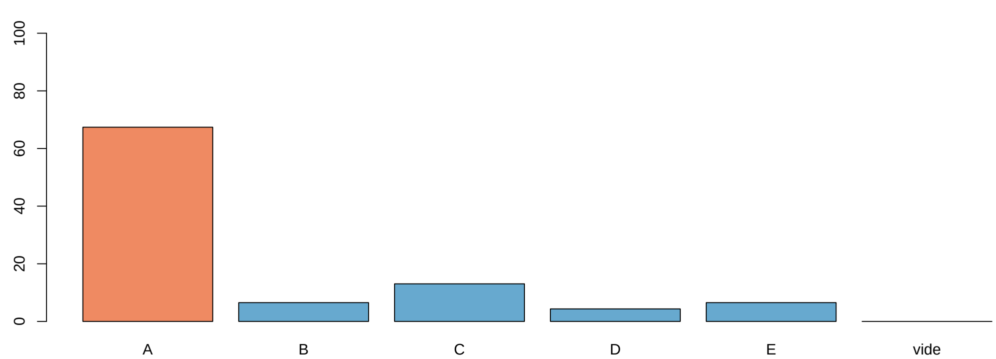
Lançons nous : comme on a une loi de Poisson,

$$\mathbb{E}(N|\Lambda) = \text{Var}(N|\Lambda) = \Lambda$$

et donc

$$\text{Var}(N) = \text{Var}(\Lambda) + \mathbb{E}(\Lambda) = 2^2 + 2 = 6$$

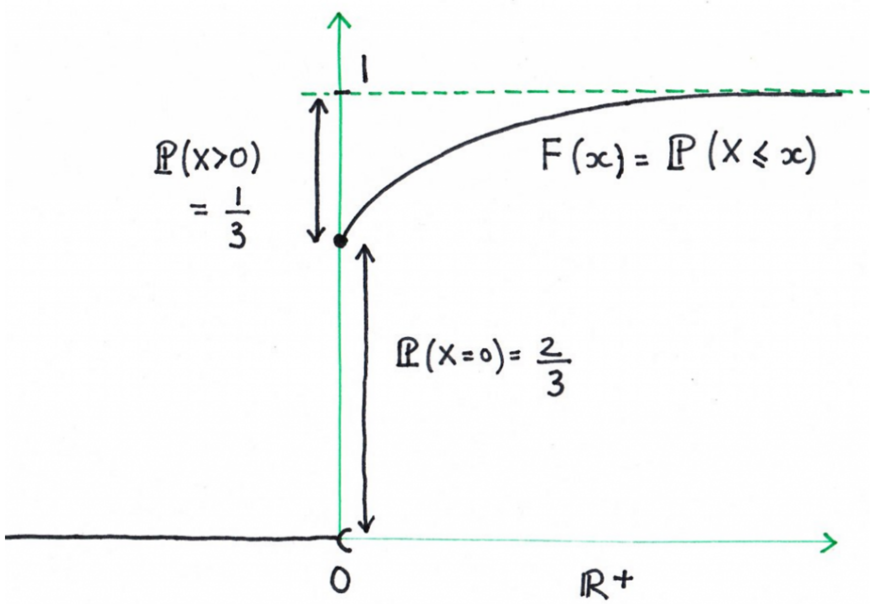
Aussi, $\text{Var}(S) = 4 \cdot 6 = 24$, qui est la réponse A.



$\boxed{16}$ Soit $F_X(x) = 1 - e^{-x}/3$ pour $x \geq 0$ et $F_X(x) = 0$ pour $x < 0$. Trouver la série génératrice des moments $M_X(t)$ de X.

A) $\dfrac{1}{1-t}$ B) $\dfrac{1}{3-3t}$ C) $\dfrac{3-t}{3-3t}$ D) $\dfrac{2}{3t} + \dfrac{1}{3(1+t)}$ E) $\dfrac{3-2t}{3-3t}$

On l'avait fait en classe ! Mais refaisons le, car (étonnamment) peu ont su le refaire... Il faut noter que la loi est un peu singulière : elle n'est ni continue, ni discrète. Il suffit de faire un dessin pour s'en rendre compte,



On a ici un mélange entre une masse de Dirac en $\{0\}$ (avec probabilité $2/3$) et une loi exponentielle (disons qu'on va le montrer proprement, avec probabilité $1/3$). Rappelons que

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|Z)).$$

Prenons ici $Y = e^{tX}$ et Z la variable de Bernoulli, $Z = \mathbf{1}Z = 0$. Alors

$$\mathbb{E}(e^{tX}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(e^{tX}|Z)) = \mathbb{E}(e^{tX}|Z=1) \cdot \mathbb{P}(Z=1) + \mathbb{E}(e^{tX}|Z=0) \cdot \mathbb{P}(Z=0).$$

Or ici $\mathbb{E}(e^{tX}|Z=1) = \mathbb{E}(e^{tX}|X=0)=\mathrm{e}^0 = 1$. Et la loi de X sachant $X>0$ (i.e. $Z=0$) est ici

$$\overline{F}_\star(x) = \mathbb{P}(X>x|X>0) = \frac{\mathbb{P}(X>x)}{\mathbb{P}(X>)} = \frac{e^{-x}/3}{e^{-0}/3} = e^{-x}$$

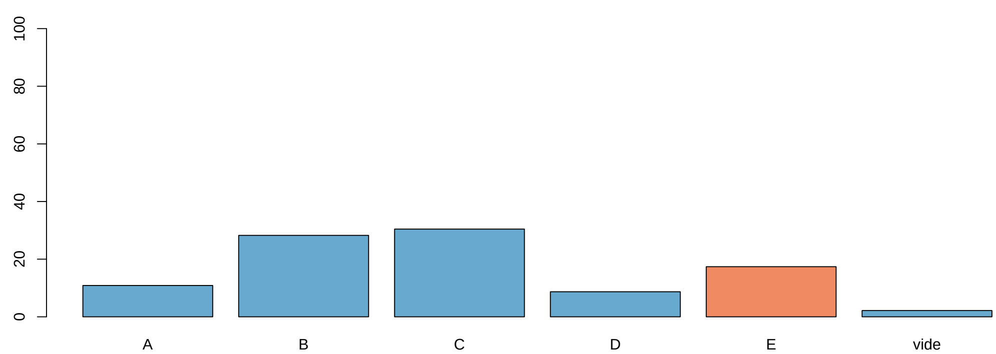
qui est la loi exponentielle de paramètre 1. Aussi,

$$\mathbb{E}(e^{tX}|Z=0) = \mathbb{E}(g(X)|X>0) = \int_0^\infty g(x)f_\star(x)dx = \int_0^\infty e^{(t-1)x}dx = \frac{1}{1-t}$$

Aussi,

$$M_X(t) = \frac{2}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-t} = \frac{3-2t}{3-3t},$$

qui est la réponse E.



$\boxed{17}$ Soit X et Y des variables aléatoires de fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}(x^2+y^2) & \text{pour } 0<x<1 \text{ et } 0<y<1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver $E[X^2+Y^2]$.

A) $\dfrac{13}{15}$ B) $\dfrac{14}{15}$ C) $\dfrac{4}{5}$ D) $\dfrac{11}{15}$ E) $\dfrac{2}{3}$

On utilise toujours la même formule,

$$\mathbb{E}[g(X,Y)] = \int\int g(x,y)f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^1 [x^2+y^2]\cdot\frac{3}{2}(x^2+y^2)dxdy$$

i.e.

$$\mathbb{E}[X^2+Y^2] = \frac{3}{2}\int_0^1\int_0^1 (x^2+y^2)^2 dxdy$$

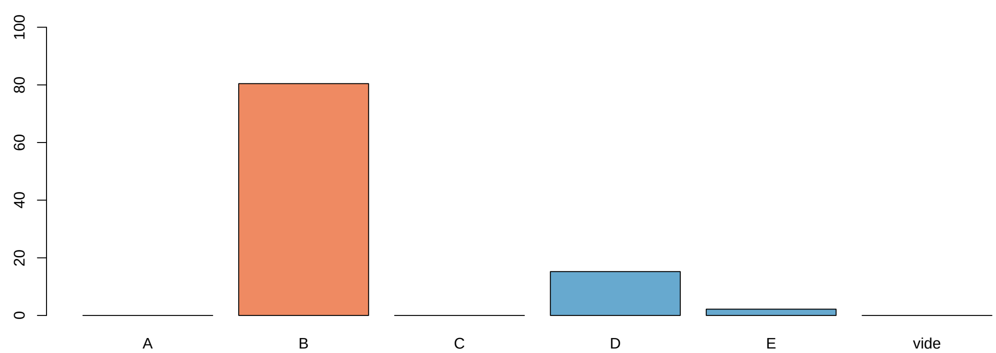
On va devoir développer,

$$\mathbb{E}[X^2+Y^2] = \frac{3}{2}\int_0^1\int_0^1 x^4+2x^2y^2+y^4 dxdy = \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{1}{5}+\frac{2}{3}y^2+y^4 dy$$

soit finallement

$$\mathbb{E}[X^2+Y^2] = \frac{14}{15}$$

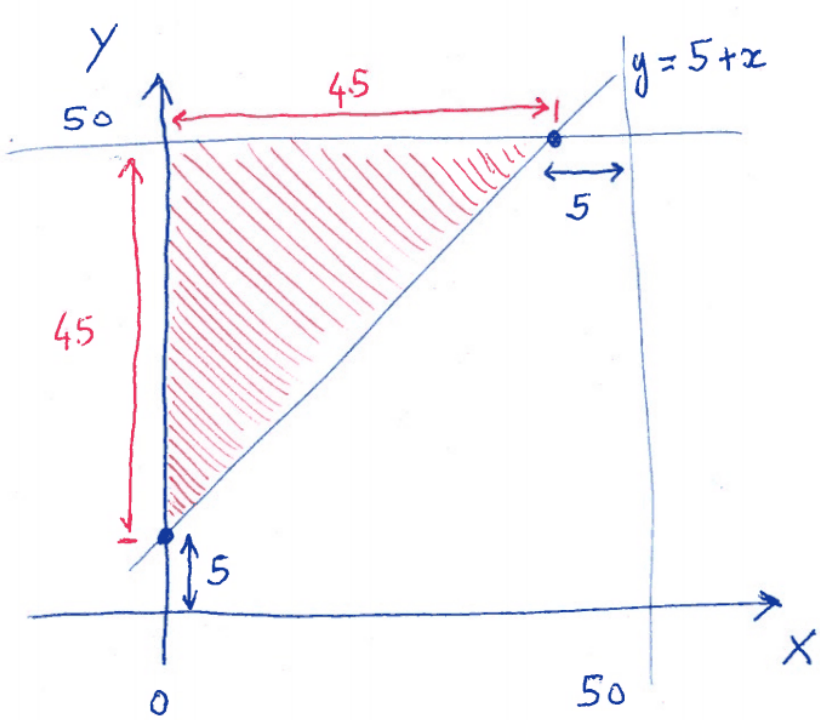
qui correspond à la réponse B.



18 Les durées de vie future (en années) d'un homme et de son épouse sont des variables aléatoires continues, indépendantes et uniformément distribuées sur l'intervalle [0, 50]. Trouver la probabilité que l'épouse survivra d'au moins 5 ans à son mari.

A) 0.35 B) 0.405 C) 0.435 D) 0.475 E) 0.49

On nous dit que $X \sim \mathcal{U}([0,50])$ et $Y \sim \mathcal{U}([0,50])$ avec X et Y indépdendantes. Et on veut $\mathbb{P}(Y - X > 5)$. Sur un dessin, on voit que l'on cherche la probabilité d'appartenir au triangle ci-dessous



et comme les lois sont uniformes, on a juste besoin de calculer l'aire du triangle (en normalisant par l'aire du carré). Soit

$$\frac{45 \cdot 45}{2}/50^2 = \frac{81}{200} = 0.405$$

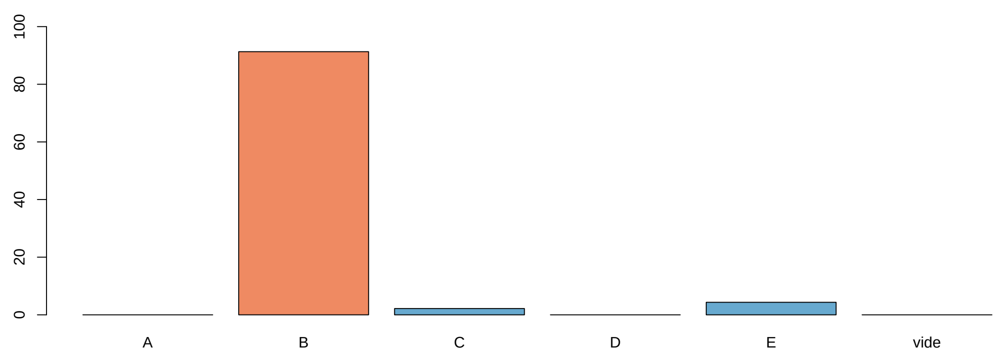
qui est la réponse B. Mais comme plusieurs n'aiment pas mes raisonnement avec des dessins, faisons un peu de calculs. Notons que

$$\mathbb{P}(Y - X > 5) = \mathbb{E}[\mathbf{1}(Y > X + 5)]$$

et donc

$$\mathbb{E}[g(X,Y)] = \int\int g(x,y) f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_0^{50}\int_0^{50} \mathbf{1}(y > x+5)\cdot \frac{1}{50}\frac{1}{50}dxdy$$

etc...



$\boxed{19}$ Pour une police d'assurance le nombre de réclamations est $N = 0, 1$ ou 2 avec probabilités communes de $\frac{1}{3}$. On connaît, à propos de la somme des 0,1 ou 2 réclamations, l'information suivante : $E[S|N = 0] = 0$, $\text{Var}[S|N = 0] = 0$, $E[S|N = 1] = 10$, $\text{Var}[S|N = 1] = 5$, $E[S|N = 2] = 20$ et $\text{Var}[S|N = 2] = 8$ Trouver la variance de S.

A) $\frac{13}{3}$ B) $\frac{13}{2}$ C) 13 D) $\frac{200}{3}$ E) 71

On en a déjà parlé, ici on utilise le fait que

$$\text{Var}(S) = \text{Var}(\mathbb{E}(S|N)) + \mathbb{E}(\text{Var}(S|N)).$$

où ici N prend 3 valeurs, $\{0, 1, 2\}$. Faisons le plus simple,

$$\mathbb{E}(\text{Var}(S|N)) = \sum_{n\in\{0,1,2\}} \text{Var}(S|N = n)\cdot \mathbb{P}(N = n)$$

Pour l'autre terme, on peut écrire

$$\text{Var}(\mathbb{E}(S|N)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(S|N)^2) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(S|N))^2$$

Le premier terme est ici

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(S|N)^2) = \sum_{n\in\{0,1,2\}} \mathbb{E}(S|N=n)^2 \cdot \mathbb{P}(N=n)$$

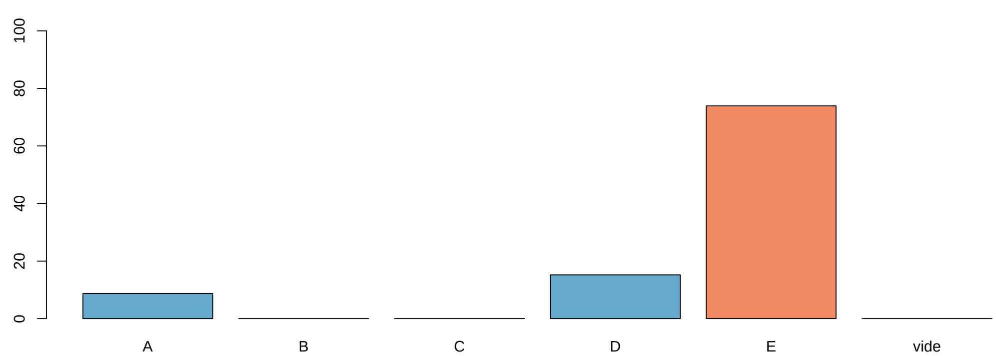
alors que le second est le carré de

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(S|N)) = \sum_{n\in\{0,1,2\}} \mathbb{E}(S|N=n) \cdot \mathbb{P}(N=n)$$

Reste à remplacer par des chiffres, en notant que les probabilités $\mathbb{P}(N=n)$ sont toutes égales,

$$\text{Var}(S) = \frac{13}{3} + \frac{200}{3} = \frac{213}{3} = 71$$

qui est la réponse E.



$\boxed{20}$ Soit X et Y des variables aléatoires continues, indépendantes et de loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. Trouver $P(X^2 \geq 2Y)$.

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{5}{6}$

Pour toute fonction $g(\cdot,\cdot)$ (telle que l'intégrale existe),

$$\mathbb{E}[g(X,Y)] = \int\int g(x,y) f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^1 g(x,y)dxdy$$

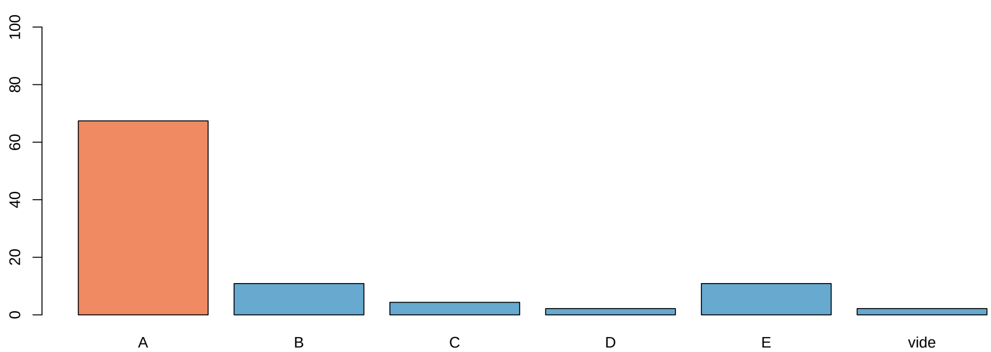
On va prendre ici $g(x,y) = \mathbf{1}(y\in[0,x^2/2])$. Aussi,

$$\mathbb{P}(X^2\geq 2Y) = \int_0^1\int_0^1 \mathbf{1}(y\in[0,x^2/2])dxdy = \int_0^1\int_0^{x^2/2} dydx$$

soit

$$\mathbb{P}(X^2\geq 2Y) = \int_0^1 \frac{x^2}{2}dx = \frac{1}{2\cdot 3}\int_0^1 3x^2dx = \frac{1}{6}\left[x^3\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

qui est la réponse A.



$\boxed{21}$ Dans une urne il y a des boules numérotées 1, 2, 3. On pige au hasard, sans remplacement, une première boule puis une seconde. Soit X le numéro sur la première boule et Y le numéro sur la seconde. Trouver $\rho_{X,Y}$, le coefficient de corrélation entre X et Y.

A) $-\dfrac{1}{2}$ B) $-\dfrac{1}{3}$ C) 0 D) $\dfrac{1}{3}$ E) $\dfrac{1}{2}$

Ecrivons les paires possibles pour (X, Y), et les probabilités associées

- $(1, 2)$ probabilité $1/6$
- $(1, 3)$ probabilité $1/6$
- $(2, 1)$ probabilité $1/6$
- $(2, 3)$ probabilité $1/6$
- $(3, 1)$ probabilité $1/6$
- $(3, 2)$ probabilité $1/6$

Aussi, on peut obtenir la loi des variables marginales de X et Y (qui sont ici identiques), à savoir uniformes sur $\{1, 2, 3\}$. On a donc facilement les deux premiers moments des lois marginales,

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} = 2$$

alors que

$$\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(Y^2) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2^2 \cdot \frac{1}{3} + 3^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{14}{3}$$

Pour le couple, on peut aussi calculer $\mathbb{E}(XY)$, i.e.

$$\mathbb{E}(XY) = 2 \cdot \frac{2}{6} + 3 \cdot \frac{2}{6} + 6 \cdot \frac{2}{6} = \frac{11}{3}$$

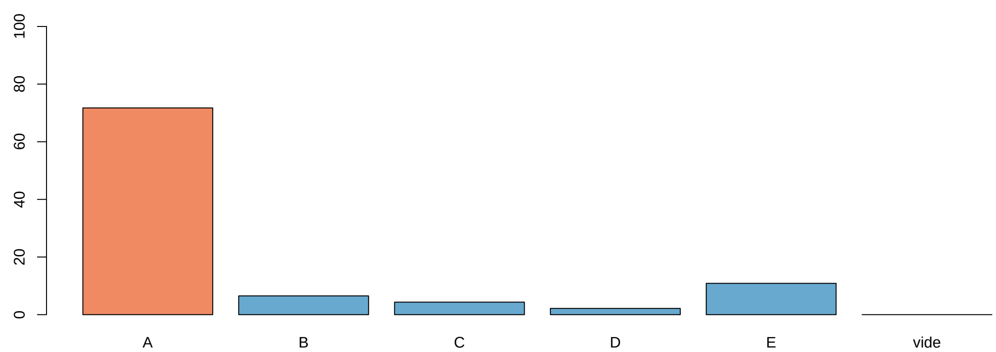
Si on regroupe tout (cf question 8.)

$$\rho_{X,Y} = \frac{\frac{11}{3} - 2^2}{\frac{14}{3} - 2^2} = \frac{-1/3}{2/3} = \frac{-1}{2}$$

on retrouve ici la réponse A. On peut aussi noter que si Z note la troisième boule, alors $X + Y + Z = 6$, et donc la variance de la somme est nulle (car on a une variable constante), i.e.

$$\text{Var}(X + Y + Z) = 0 = 3\text{Var}(X) + 6 \underbrace{\rho_{X,Y} \cdot \text{Var}(X)}_{\text{Cov}(X,Y)},$$

par symétrie du problème. Or, comme on vient de le voir, $\text{Var}(X) = 2/3$ donc $\rho_{X,Y} = -1/2$. C'est plus joli comme preuve, non ?



$\boxed{22}$ Soit X une variable aléatoire dont la série génératrice des moments est $M_X(t) = e^{3t}(1-t^2)^{-1}$. Trouver $\sigma_X/E[X]$.

A) 0.125 B) 0.333 C) 0.471 D) 0.500 E) 0.667

La fonction génératrice des moments est ici simple (en fait, on l'a vu en cours),

$$M_X(t) = \frac{e^3t}{1-t^2}$$

Deux solutions sont possibles,

– dériver deux fois cette fonctions, et prendre les valeurs en 0
– regarder le début du développement en série entière

On va utiliser la seconde méthode, c'est plus élégant. On note que

$$e^{3t} = 1 + \frac{(3t)}{1!} + \frac{(3t)^2}{2!} + \frac{(3t)^3}{3!} + \frac{(3t)^4}{4!} + \cdots$$

et

$$\frac{1}{1-t^2} = 1 + t^2 + t^6 + t^8 + \cdots$$

(on reconnait la série géométrique). Je vais loin dans mes développement, mais en fait, on peut se limiter à la puissance 2. Aussi, quand on fait le produit,

$$\frac{e^3t}{1-t^2} = 1 + (3)\cdot t + \left(1+\frac{9}{2}\right)\cdot t^2 + (\cdots)\cdot t^3$$

et comme on l'avait rappelé en cours, les termes de droites, on s'en moque, parce que quand on dérive, une fois, voire deux fois, ils vont s'annuler (en 0). Aussi,

$$M'_X(t) = (3) \cdot 1 + 2\left(1 + \frac{9}{2}\right) \cdot t + \cdots \text{ et donc } M'_X(0) = (3) + 0 = 3,$$

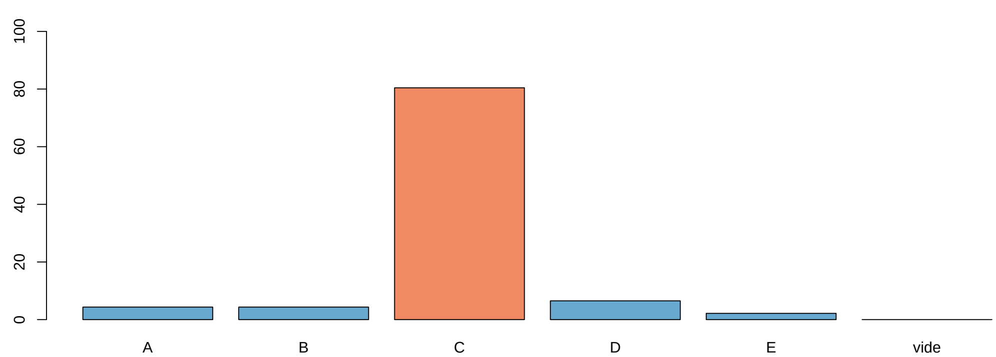
et

$$M''_X(t) = 2\left(1 + \frac{9}{2}\right) \cdot 1 + 3 \cdot 2\,(\cdots) \cdot t + \cdots \text{ et donc } M''_X(0) = 11.$$

Maintenant, on fait que $\mathbb{E}(X) = M'_X(0)$ et $\mathbb{E}(X^2) = M''_X(0)$. Aussi,

$$\frac{\sigma_X}{\mathbb{E}(X)} = \frac{\sqrt{M''_X(0) - M'_X(0)^2}}{M'_X(0)} = \frac{\sqrt{11 - 3^2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sim 0.471$$

qui est la réponse C.



$\boxed{23}$ Soit X et Y deux variables aléatoires continues de fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x + y & \text{pour } 0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver $\text{Cov}(X,Y)$, la covariance de X et Y.

A) $-\dfrac{1}{144}$ B) $-\dfrac{1}{12}$ C) 0 D) $\dfrac{1}{12}$ E) $\dfrac{1}{144}$

On va utiliser le fait que $\text{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Compte tenu de la symmétrie, $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$, donc il suffit de calculer une des deux espérances, pour commencer

$$f_X(x) = \int f_{X,Y}(x,u)du = \int_0^1 (x+u)du = x + \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = x + \frac{1}{2}$$

de telle sorte que

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 x f_X(x)dx = \int_0^1 x^2 + \frac{x}{2}\ dx = \left[\frac{x^3}{3}\frac{x^2}{4}+\right]_0^1 = \frac{7}{12}$$

Pour l'espérance croisée

$$\mathbb{E}(XY) = \int_0^1 \int_0^1 xy f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^1 xy(x+y)dxdy = \int_0^1 \int_0^1 x^2y + xy^2\ dxdy$$

soit

$$\mathbb{E}(XY) = \int_0^1 \left[\frac{x^3y}{3} + \frac{x^2y^2}{2}\right]_0^1 dy = \int_0^1 \frac{y}{3}\frac{y^2}{2}\ dy$$

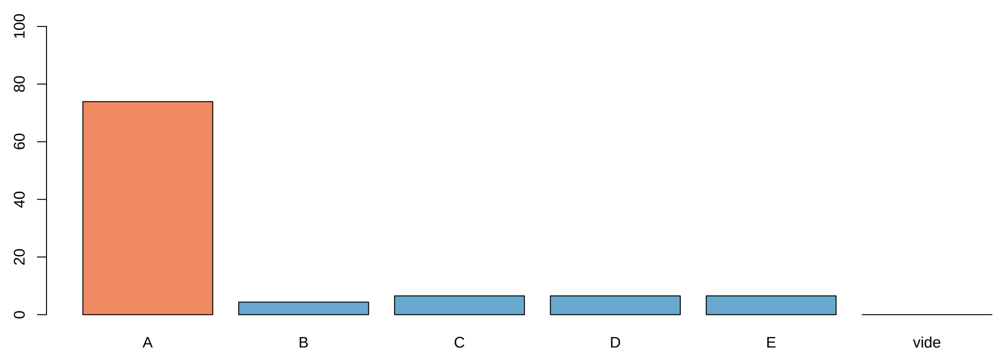
i.e.

$$\mathbb{E}(XY) = \left[\frac{y^2}{3\cdot 2} + \frac{y^3}{2\cdot 3}+\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Aussi, finallement,

$$\text{cov}(X,Y) = \frac{1}{3} - \frac{7^2}{12^2} = \frac{48-49}{144} = \frac{-1}{144}$$

qui est la réponse A.



$\boxed{24}$ Vous choisissez un nombre $X = x$ entre 0 et 1 selon la loi uniforme. Vous choisissez ensuite un second nombre Y entre x et 1 toujours selon une loi uniforme. Trouver $P(X + Y \leq 1)$.

A) $\ln 2$ B) $1 - \ln 2$ C) e^{-1} D) $1/2$ E) $1/4$

Y sachant $X = x$ suit une loi uniforme, sur $[x, 1]$ et X suit une loi uniforme sur $[0, 1]$. On va utiliser

$$\mathbb{E}[g(X,Y)] = \int\int g(x,y) f_{X,Y}(x,y)dxdy = \mathbb{E}[g(X,Y)] = \int\int g(x,y) f_{Y|X}(y|x) f_X(x)dxdy$$

avec ici $g(x, y) = \mathbf{1}(x + y \leq 1)) = \mathbf{1}(y \leq 1 - x)) =$. Si on commence par intégrer sur x,

$$P(X + Y \leq 1) = \int_0^1 \int_x^{1-x} f_{Y|X}(y|x) f_X(x)dydx$$

soit

$$P(X + Y \leq 1) = \int_0^1 \int_x^{1-x} \frac{\mathbf{1}(1 - x \geq x)}{1 - x} \cdot 1dydx.$$

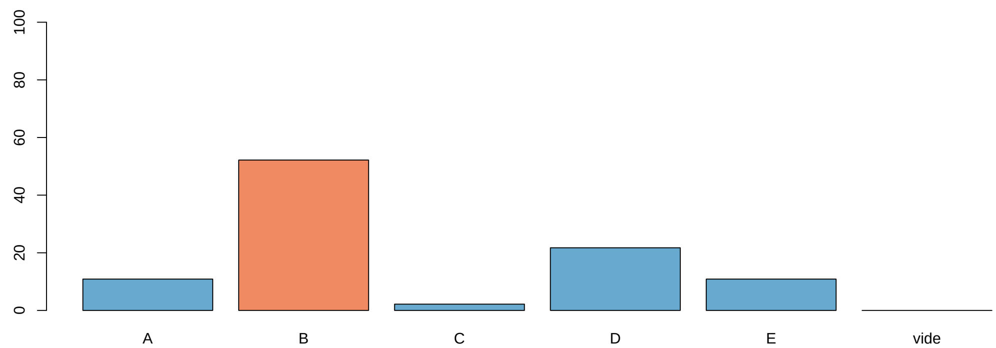
Si on calcule l'intégrale à l'intérieur,

$$P(X + Y \leq 1) = \int_0^{1/2} \frac{1 - 2x}{1 - x}dx = \int_0^{1/2} \frac{(2 - 2x) - 1}{1 - x}dx = \int_0^{1/2} 2 - \frac{1}{1 - x}dx$$

i.e.

$$P(X+Y \leq 1) = 1 - [\log(1-x)]_0^{1/2} = 1 - \log 2$$

qui est la réponse B.



$\boxed{25}$ Le nombre N de réclamations pour une compagnie d'assurance suit une loi de Poisson de paramètre λ. Le montant X de chaque réclamation suit une loi exponentielle également de paramètre λ. Soit T le montant total de toutes les réclamations. Trouver $\text{Var}[T]$.

A) λ B) $\dfrac{1}{\lambda}$ C) $\dfrac{2}{\lambda}$ D) $\dfrac{1}{\lambda^2}$ E) $1+\dfrac{1}{\lambda}$

Bon, on ne va pas y passer des heures. L'idée est ici de conditionner par N, en notant que

$$\text{Var}[T] = \text{Var}[\mathbb{E}(T|N)] + \mathbb{E}(\text{Var}[T|N])$$

aussi, ici

$$\mathbb{E}(T|N) = \mathbb{E}(X_1 + \ldots + X_N|N) = N \cdot \mathbb{E}(X_i)$$

et

$$\mathrm{Var}[T|N] = \mathrm{Var}[X_1 + \ldots + X_N|N] = N \cdot \mathrm{Var}[X_i]$$

Donc en prenant la variance, et l'espérance, respectivement

$$\mathrm{Var}[\mathbb{E}(T|N)] = \mathrm{Var}[N \cdot \mathbb{E}(X_i)] = \mathbb{E}(X_i)^2 \cdot \mathrm{Var}[N]$$

et

$$\mathbb{E}(\mathrm{Var}[T|N]) = \mathbb{E}(N \cdot \mathrm{Var}[X_i]) = \mathbb{E}(N) \cdot \mathrm{Var}[X_i].$$

Aussi, en regroupant

$$\mathrm{Var}[T] = \mathbb{E}(X_i)^2 \cdot \mathrm{Var}[N] + \mathbb{E}(N) \cdot \mathrm{Var}[X_i].$$

On utilise alors les propriétés de la loi de Poisson ($\mathbb{E}(N) = \mathrm{Var}[N] = \lambda$) et de la loi exponentielle ($\mathbb{E}(N) = \lambda^{-1}$ et $\mathrm{Var}[N] = \lambda^{-2}$), et en substituant

$$\mathrm{Var}[T] = (\lambda^{-1})^2 \cdot \lambda + \lambda^{-2} \cdot \lambda = 2\lambda^{-1}$$

qui est la réponse C.