EXAMEN INTRA (1/3), ACT 2121

ARTHUR CHARPENTIER

Les calculatrices sont autorisées. Les documents sont en revanche interdits.

Il y a 30 questions. Sur la feuille jointe, veuillez reporter vos réponses (une unique réponse par question)

- vous gagnez 1 points par bonne réponse
- vous gagnez 0 point par mauvaise réponse

Aucune justification n'est demandée.

Votre note finale est le total des points (sur 30).

Comme annoncé au début de l'examen, et sur le formulaire de réponses, afin de tenir compte des termes de l'entente dévaluation signée en début de cours, seules les 25 premières questions ont été corrigées.

$\boxed{1}$ Une compagnie fait une offre à quatre consommateurs potentiels. La compagnie croit que la probabilité de faire une vente est de 0.7 pour chacun des trois premiers consommateurs mais qu'elle est seulement de 0.2 pour le quatrième consommateur. Les achats d'un consommateur sont indépendants des achats d'un autre consommateur.
Calculer la probabilité qu'au plus deux consommateurs acceptent l'offre.

A) 40.2% B) 45.1% C) 48.7% D) 52.4% E) 56.9%

On se lance,

$$\mathbb{P}(2 \text{ acceptent}) = \mathbb{P}(2 \text{ parmi}\{1,2,3\}) + \mathbb{P}(1 \text{ parmi}\{1,2,3\} \text{ et } \{4\})$$

soit, par indépendance,

$$\binom{3}{2} 0.7^2 \cdot (1-0.7) \cdot (1-0.2)$$

pour la première partie (2 acceptent, un refuse, et le dernier refuse), et pour la seconde

$$\binom{3}{1} 0.7 \cdot (1-0.7)^2 \cdot 0.2$$

ce qui donne, au total

$$3 \cdot 0.7(0.7 \cdot 0.3 \cdot 0.8 + 0.3^2 \cdot 0.2)$$

Maintenant, pour les deux autres,

$$\mathbb{P}(1 \text{ accepte}) = \mathbb{P}(1 \text{ parmi}\{1,2,3\}) + \mathbb{P}(\{4\})$$

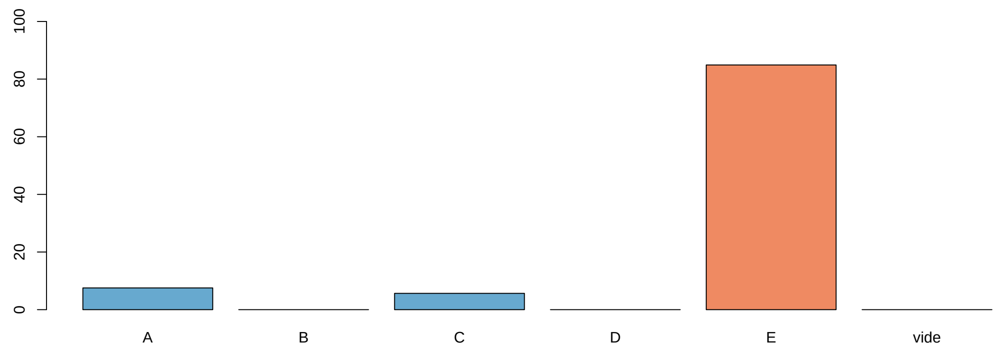
soit

$$\binom{3}{1} 0.7 \cdot (1-0.7)^2 \cdot (1-0.2) + (1-0.7)^3 \cdot 0.2$$

alors que

$$\mathbb{P}(0 \text{ accepte}) = (1-0.7)^3 \cdot (1-0.2)$$

Maintenant, si on somme ces trois probablités, on obtient 0.5688. Bref, la bonne réponse était E.



Dans le livre de référence du cours (Ex. 11.5), le calcul se fait par passage au complémentaire... et le même résultat est obtenu.

$\boxed{2}$ Un actuaire fait les constatations suivantes :

(i) Le taux d'accident des femmes qui conduisent est 0.015, lequel représente 80% du taux d'accident de tous les conducteurs.

(ii) Le taux d'accident des jeunes hommes qui conduisent est 4 fois le taux d'accident des hommes adultes qui conduisent.

Nombre de conducteurs selon l'âge et le sexe.

	Jeune	Adulte	Total
Femme	15 000	45 000	60 000
Homme	12 000	28 000	40 000
Total	27 000	73 000	100 000

Calculer le taux d'accident pour les jeunes hommes qui conduisent.

A) 3.1% B) 5.1% C) 7.1% D) 9.1% E) 11.1%

Il y a 60,000 femmes, qui ont un taux d'accident de 1.5%, il y a donc eu 900 accidents pour les femmes. On nous dit aussi que le taux d'accident des femmes est 80% du taux pour la population totale. Le taux d'accident pour la population total est alors de 1.5% /0.8 soit 1.875%. Comme on a, en tout 100,000 personnes, c'est qu'il y a eu 1,875 accidents. En tout. Soit 975 accidents avec des hommes au volant. Voilà ce qu'on peut dire avec (i).

Pour la seconde hypothèse, on utilise la formule des probatilités totales,

$$\mathbb{P}(\text{Accident}|H) = \mathbb{P}(\text{Accident}|H,J)\cdot\mathbb{P}(J|H) + \mathbb{P}(\text{Accident}|H,A)\cdot\mathbb{P}(A|H)$$

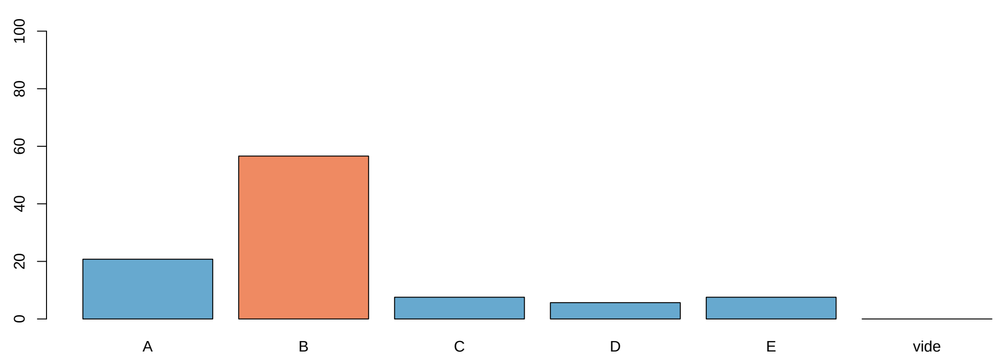
soit, puisque $\mathbb{P}(\text{Accident}|H,J) = 4\cdot\mathbb{P}(\text{Accident}|H,A)$,

$$\frac{975}{40000} = \mathbb{P}(\text{Accident}|H,J)\cdot\frac{12000}{40000} + \frac{1}{4}\cdot\mathbb{P}(\text{Accident}|H,J)\cdot\frac{28000}{40000}$$

aussi

$$\mathbb{P}(\text{Accident}|H,J) = \frac{4\cdot 975}{4\cdot 12000 + 28000} = 0.0513,$$

qui est la réponse B.



$\boxed{3}$ Dans une ville de 40 000 habitants on a les informations suivantes :

i) 80% des gens ont moins de 70 ans ;

ii) 60% ont terminé leurs études secondaires ;

iii) 50% gagnent plus de 40 000\$ par année ;

iv) 75% de ceux qui ont terminé le secondaire ont moins de 70 ans ;

v) 50% de ceux qui ont moins de 70 ans gagnent plus de 40 000\$ par année ;

vi) parmi ceux qui ont 70 ans ou plus et n'ont pas terminé leur secondaire, il y en a 40% qui gagnent plus de 40 000\$/an.

Trouver le pourcentage de la population qui a plus de 70 ans, a terminé son secondaire et gagne moins de 40 000\$ par an.

A) 4% B) 6% C) 7% D) 8% E) 9%

On a plusieurs évènements. $A = \{$ plus de 70 ans $\}$, $B = \{$ fini ses études secondaires $\}$, et $C = \{$ gagne mois de 40 $\}$.

On veut calculer ici $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$. Et ce dont on dispose, c'est

- $\mathbb{P}(\bar{A}) = 0.8$, et donc $\mathbb{P}(A) = 0.2$ (on va utiliser la notation $\bar{A}$ pour le complémentaire)
- $\mathbb{P}(B) = 0.6$, et donc $\mathbb{P}(\bar{B}) = 0.4$ (si besoin)
- $\mathbb{P}(\bar{C}) = 0.5$, et donc $\mathbb{P}(C) = 0.5$
- $\mathbb{P}(\bar{A}|B) = 0.75$ (on va utiliser cette information ensuite pour calculer probabilité $\mathbb{P}(A \cap B)$)
- $\mathbb{P}(\bar{C}|\bar{A}) = 0.5$
- $\mathbb{P}(\bar{C}|A \cap \bar{B}) = 0.4$

On peut ensuite souffler, et se relire, mais je pense que c'est ce qui est dit ici.

On peut réécrire les deux premi 'eres lois conditionnelles, pour avoir des intersections, en particulier

- $\mathbb{P}(\bar{A}|B) = 0.75$ donc

$$\mathbb{P}(\bar{A}|B) = \frac{\mathbb{P}(\bar{A} \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \text{ soit } \mathbb{P}(A \cap B) = 0.6 \cdot 0.25 = 0.15$$

- $\mathbb{P}(\bar{C}|\bar{A}) = 0.5$ donc

$$\mathbb{P}(\bar{C}|\bar{A}) = \frac{\mathbb{P}(\bar{C} \cap \bar{A})}{\mathbb{P}(\bar{A})} = \frac{1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(A \cap C)}{1 - \mathbb{P}(A)} \text{ soit } \mathbb{P}(A \cap C) = 0.5 \cdot 0.8 - 0.3 = 0.1$$

Maintenant la dernière,

$$\mathbb{P}(\bar{C}|A\cap\bar{B}) = 0.4 = \frac{\mathbb{P}(\bar{C}\cap A\cap\bar{B})}{\mathbb{P}(A\cap\bar{B})}$$

Le dénominateur ne devrait pas nous faire peur, car

$$\mathbb{P}(A\cap\bar{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A\cap B) = 0.2 - 0.15 = 0.05$$

(et on connaissait les deux termes). Pour le numérateur, allons-y tranquillement,

$$\mathbb{P}(\bar{C}\cap[A\cap\bar{B}]) = \mathbb{P}([A\cap\bar{B}]) - \mathbb{P}(C\cap[A\cap\bar{B}])$$

et

$$\mathbb{P}([C\cap A]\cap\bar{B}) = \mathbb{P}([C\cap A]) - \mathbb{P}(C\cap A\cap B)$$

Cette fois, on a le droit de sourire car on voit enfin apparaitre le terme que l'on cherche. Reste un dernier calcul à faire, en notant que

$$\mathbb{P}([A\cap\bar{B}]) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A\cap B)$$

et cette fois, on connaît *tous* les termes,

$$\mathbb{P}(\bar{C}\cap[A\cap\bar{B}]) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A\cap B) - [\mathbb{P}(C\cap A]) - \mathbb{P}(C\cap A\cap B)]$$

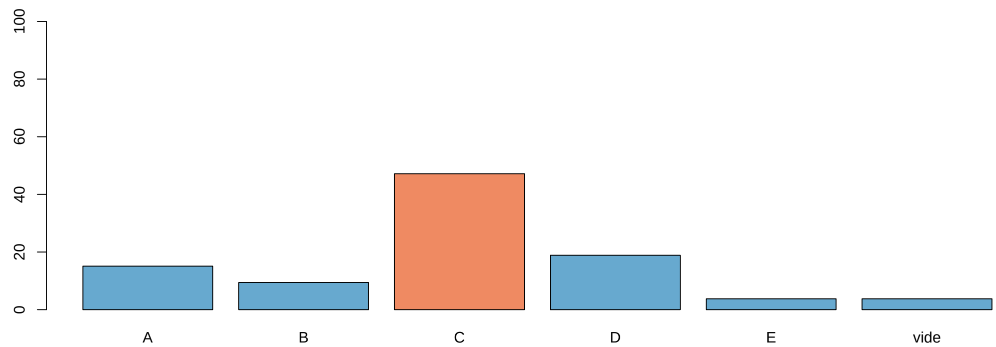
soit

$$\mathbb{P}(\bar{C}\cap[A\cap\bar{B}]) = 0.2 - 0.15 - (0.1 - \mathbb{P}(C\cap A\cap B)) = \mathbb{P}(C\cap A\cap B) - 0.05$$

Aussi,

$$0.4 = \frac{\mathbb{P}(C\cap A\cap B) - 0.05}{0.05} \text{ soit } \mathbb{P}(C\cap A\cap B) = 0.05 + 0.4\cdot 0.05 = 0.07$$

qui est la réponse C.



$\boxed{4}$ Les coefficients a et b de l'équation quadratique $x^2+ax+b=0$ sont déterminés en lançant deux fois un dé bien équilibré.
Trouver la probabilité que l'équation admette deux racines réelles distinctes.

A) 17/36 B) 1/6 C) 19/36 D) 1/3 E) 1/2

Pour qu'une équation de degré deux admette deux racines, réelles, distinctes, la condition nécessaire et suffisante est que a^2-4b soit strictement positif (avec les notations ici). Aussi,

$$\mathbb{P}(2 \text{ racines distinctes}) = \mathbb{P}(a^2-4b>0)$$

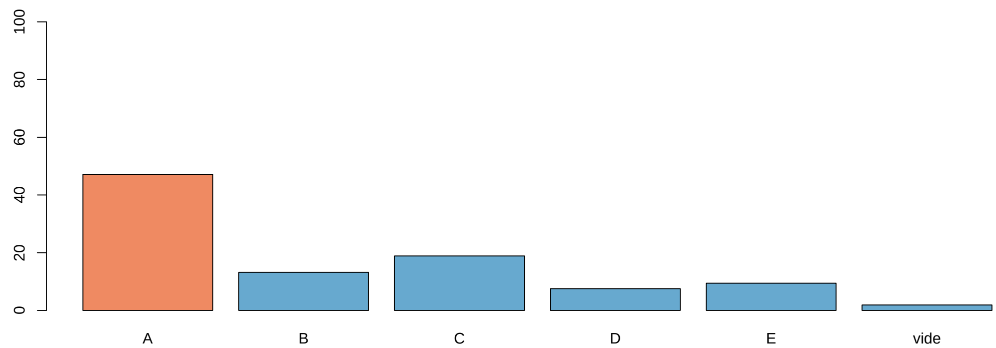
(on a besoin d'avoir une condition nécessaire et suffisante, sinon on aurait une inégalité). Bref, en lançant un dé deux fois, indépendamment, on veut compte le nombre de scénarios pour lesquels $a^2-4b>0$, où a et b sont les faces apparantes des dés. Bon, on les compte ?

- rien si a tombe sur 1 ou 2
- $(a,b)=(3,1)$ ou $(3,2)$
- $(a,b)=(4,1)$, $(4,2)$, $(4,3)$
- $(a,b)=(5,1)$, $(5,2)$, $(5,3)$, $(5,4)$, $(5,5)$ et (5,6)
- et pareil si a tombe sur 6. En fait, si a tombe sur 5 ou 6 on est certain d'avoir deux racines réelles distinctes.

Bon, rester à compter...

$$\mathbb{P}(2 \text{ racines distinctes}) = \frac{0+0+2+3+6+6}{6\cdot 6} = \frac{17}{36}$$

qui correspond à la réponse A.



$\boxed{5}$ Vous avez une probabilité de 10% d'échouer le cours A et de 20% d'échouer le cours B (et les probabilités restent les mêmes si vous reprenez un de ces cours échoués). Quelle est la probabilité que vous soyez exclus du programme parce que vous avez échoué 2 fois le cours A ou deux fois le cours B ? (Les cours A et B sont obligatoires).

A) 0.0144 B) 0.144 C) 0.072 D) 0.0496 E) 0.064

On va supposer les échecs indépendants, même si ce n'est pas préciser (et que ce n'est pas réaliste... mais on va éviter de complexifier inutilisement en parlant de probabilité conditionnelle d'échecs de cours). La probabilité que l'on cherche est

$$\mathbb{P}(\{2 \text{ échecs de } A\} \cup \{2 \text{ échecs de } B\})$$

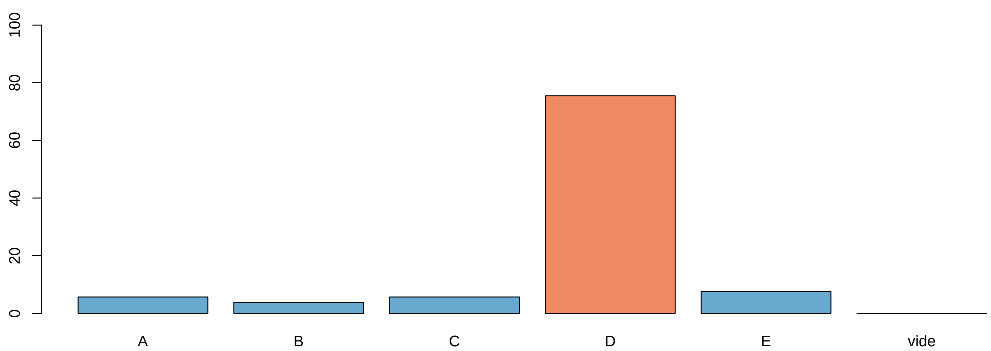
on utilise la propriété bien connue, qui nous dit que cette probabilité est

$$\mathbb{P}(\{2 \text{ échecs de } A\}) + \mathbb{P}(\{2 \text{ échecs de } B\}) - \mathbb{P}(\{2 \text{ échecs de } A\} \cap \{2 \text{ échecs de } B\})$$

Maintenant, on utilise l'indépendance pour écrire

$$0.1 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.2 - 0.1^2 \cdot 0.2^2$$

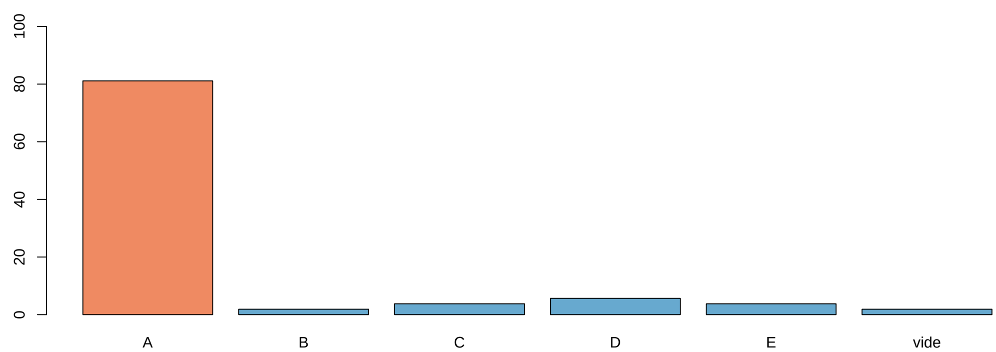
ce qui donne 4.96%, qui est la réponse D.



$\boxed{6}$ Dans une classe, il y a 30 pupitres numérotés de 1 à 30. La classe comprend 18 filles et 12 garçons. Trouver la probabilité que le pupitre numéro 18 soit occupé par une fille.

A) 3/5 B) 2/5 C) 2/3 D) 1/30 E) 1/2

Euh... ben c'est 18/30, soit 3/5, qui est la réponse A.



$\boxed{7}$ Deux nombres sont successivement choisis (avec remplacement) dans l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 100\}$.

Trouver la probabilité que le premier soit strictement plus grand que le second.

A) 1/2 B) 49/100 C) 51/100 D) 99/200 E) 101/200

On pige deux nombres, X_1 et X_2, aléatoirement, et uniformément. Autrement dit, pour chaque tirate, on a 1 chance sur 100 de tirer un nombre x. On veut ici $\mathbb{P}(X_1 > X_2)$. L'idée est probablement d'utiliser la formule des probabilités totales, on conditionnant par X_1 (par exemple).

$$\mathbb{P}(X_1 > X_2) = \sum_{x=1}^{100} \mathbb{P}(X_1 > X_2 | X_1 = x) \cdot \mathbb{P}(X_1 = x)$$

Pour la second probabilité, c'est facile, on vient d'en parler, $\mathbb{P}(X_1 = x) = 1/100$. Pour la première, on regarde

$$\mathbb{P}(X_1 > X_2 | X_1 = x) = \mathbb{P}(x > X_2) = \frac{x-1}{100}$$

Reste à sommer,

$$\mathbb{P}(X_1 > X_2) = \sum_{x=1}^{100} \frac{x-1}{100} \cdot \frac{1}{100}$$

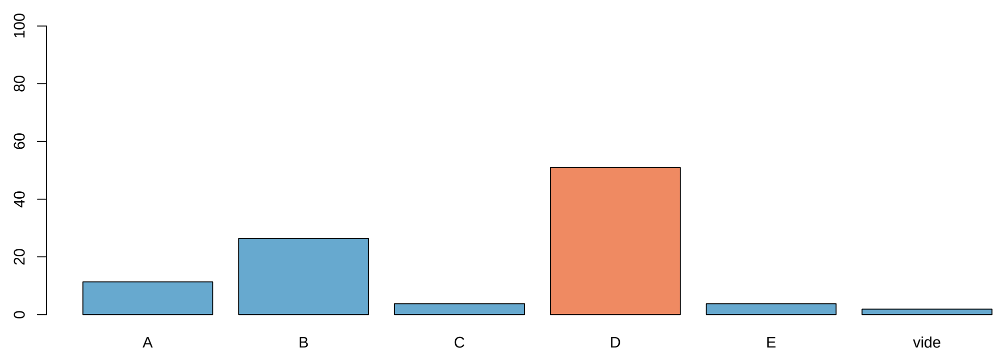
soit

$$\mathbb{P}(X_1 > X_2) = \frac{1}{100^2}\left(\sum_{x=1}^{100} x - 1\right) = \frac{1}{100^2}\left(\sum_{x=0}^{99} x\right)$$

en décallant les indices, qui est la somme des entiers de 1 (ou 0, peu importe) à 99. Et ça, on sait que c'est

$$(1+99)+(2+98)+(3+97)+\cdots+(48+52)+(49+51)+50$$

soit $100 \cdot 49 + 50 = 4950$. La probabilité que l'on cherche est alors de 49.5%, qui est aussi égale à 99/200, qui était la réponse D.



$\boxed{8}$ Dans un cours avec 33 inscrits, 17 ont obtenu un A à l'intra et 14 un A au final. Si 11 étudiants n'ont obtenu aucun A, combien ont eu deux fois des A ?

A) 22 B) 17 C) 14 D) 11 E) 9

On nous demande $p = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$ (avec les notations naturelles). On sait que $\mathbb{P}(A_1) = 17/33$ et $\mathbb{P}(A_2) = 14/33$. On sait aussi que

$$\mathbb{P}(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = 11/33.$$

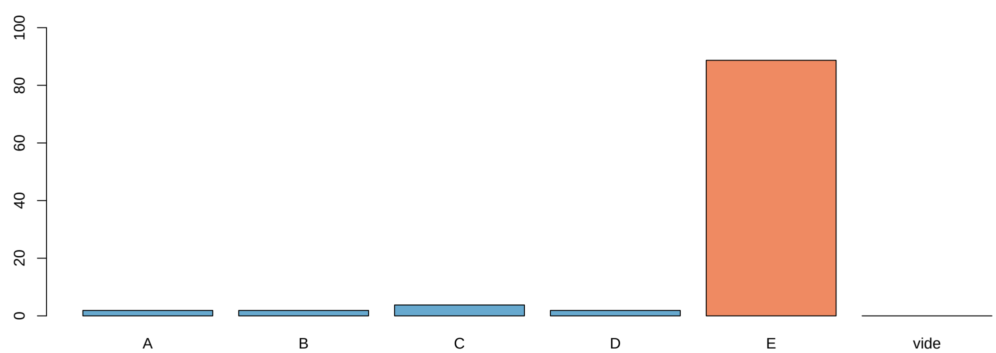
Si on fait un dessin, on voit la solution...

- $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap \bar{A}_2) = 17/33$
- $\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(\bar{A}_1 \cap A_2) = 14/33$
- $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap \bar{A}_2) + \mathbb{P}(\bar{A}_1 \cap A_2) + \underbrace{\mathbb{P}(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2)}_{11/33} = 1$

On va commencer à substituer dans la dernière équation

$$(17/33 - p) + (14/33 - p) + p + 11/33 = 1$$

soit $42/33 - p = 1$ soit $p = 9/33$. C'est à dire que 9 personne ont obtenus deux fois des A, qui est la réponse E.



$\boxed{9}$ Dans un groupe de 3 personnes le taux de décès est 0.2 et dans un groupe de 2 personnes le taux de décès est 0.1. Calculer la probabilité qu'au moins 4 de ces 5 personnes survivent.

A) 0.385 B) 0.500 C) 0.645 D) 0.792 E) 0.818

On veut donc aucun décès, ou un.

$$\mathbb{P}(\text{aucun décès}) = 0.8^3 \cdot 0.9^2 \sim 0.41474$$

et,

$$\mathbb{P}(\text{un décès}) = \mathbb{P}(\text{un décès dans le groupe 1}) + \mathbb{P}(\text{un décès dans le groupe 2})$$

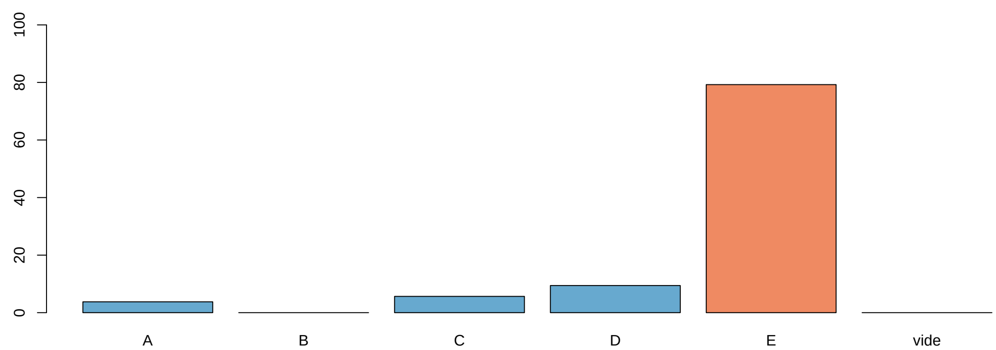
reste à écrire les probabilités

$$\mathbb{P}(\text{un décès}) = \binom{3}{1} 0.2 \cdot 0.8^2 \cdot 0.9^2 + \binom{2}{1} 0.8^3 \cdot 0.9 \cdot 0.1$$

soit

$$\mathbb{P}(\text{un décès}) \sim 0.31104 + 0.09216 = 0.4032$$

En sommant les deux, on obtient 0.81792, qui est la réponse E.



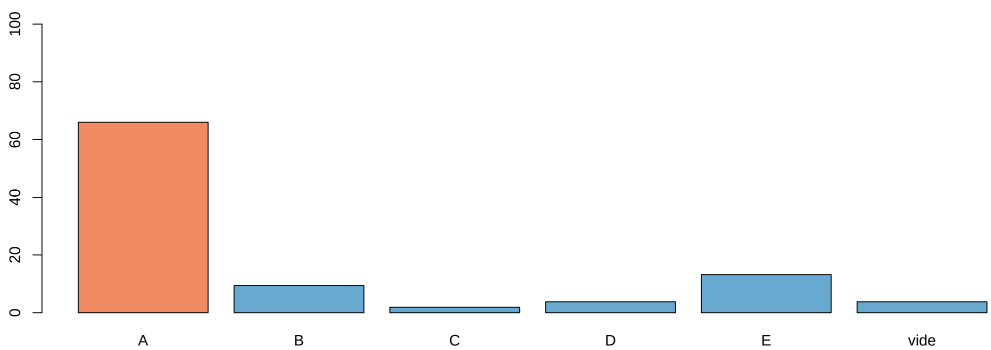
$\boxed{10}$ On estime que 50% des gens répondent à un questionnaire immédiatement et que 40% de ceux qui ne répondent pas immédiatement répondent après un rappel. Un questionnaire est envoyé à 4 personnes et une lettre de rappel à ceux qui ne répondent pas immédiatement. Trouver la probabilité qu'au moins trois des quatre personnes ne répondent pas du tout.

A) 0.084 B) 0.042 C) 0.008 D) 0.25 E) 0.025

Le plus simple est de calculer la probabilité de ne pas répondre du tout. On parle ici des 60% des 50% (qui ne répondent pas immédiatement). Bref, la probabilité de ne pas répondre du tout est de 30%. La probabilité est ici la probabilité que 3 ou 4 personnes ne répondent pas, sur 4, soit

$$\binom{4}{3}0.3^3 \cdot (1-0.7) + 0.3^4 \sim 0.0837$$

qui est la réponse A.



$\boxed{11}$ Dans une série éliminatoire où la première équipe à remporter 4 parties emporte la série, l'équipe A mène par deux parties à une. Pour chaque partie la probabilité que A gagne est 0.7 (et que B gagne 0.3). Trouver la probabilité que B remporte la série.

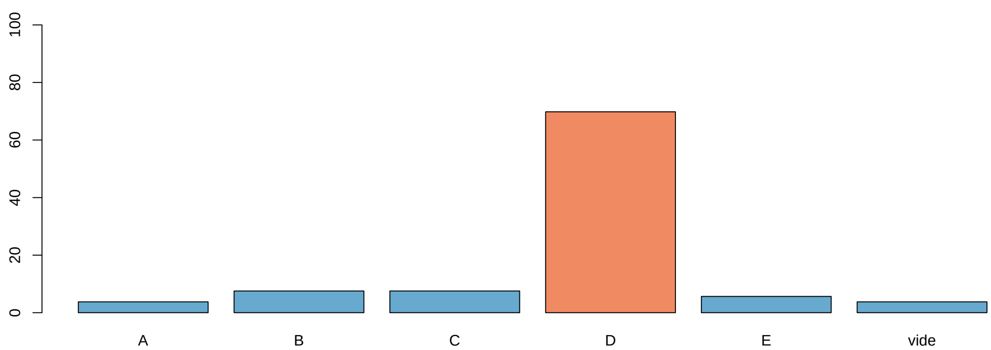
A) 12.3% B) 10.5% C) 9.2% D) 8.4% E) 7.2%

Les seules possibilités sont

- gagner trois matchs et en perdre un (le prochain, celui d'après, ou celui encore d'après) soit trois fois $0.7 \cdot 0.3^3 \sim 0.0189$

- gagner trois matchs sans en perdresoit $0.3^3 \sim 0.0270$

Si on somme les probabilités, on arrive à 0.0837, qui est la réponse D.



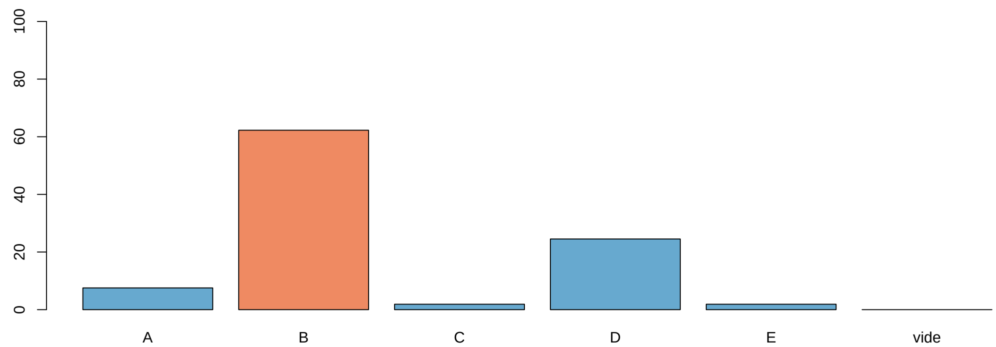
$\boxed{12}$ Les réclamations sont classées comme petites ou grandes par la compagnie d'assurance. La probabilité qu'une réclamation soit petite est 0.75. S'il y a eu 7 réclamations ce mois-ci, trouver la probabilité qu'il y ait eu au moins six réclamations consécutives qui étaient petites.

A) 31.15% B) 22.25% C) 37.75% D) 44.50% E) 49.25%

Le plus simple est de noter que pour avoir 6 réclamations consécutives, on parle soit des 6 premières, soit des 6 dernières. Sinon on a 7 déclarations petites. Bref, la probabilité est ici

$$2 \cdot 0.75^6 \cdot 0.25 + 0.75^7 = \frac{2 \cdot 3^6 + 3^7}{4^7} = \frac{3645}{16384} \sim 0.2224731$$

qui est la réponse B.



$\boxed{13}$ Six dés bien équilibrés sont lancés. Trouver la probabilité que le nombre de 1 moins le nombre de 2 soit exactement 3.

A) 0.167 B) 0.080 C) 0.056 D) 0.045 E) 0.030

De mémoire, on a fait un exercice similaire en classe, si ce n'était pas le même... le plus simple est de dénombrer, car il y a peu de possibilités

- trois 1, et aucun 2
- quatre 1 et un 2

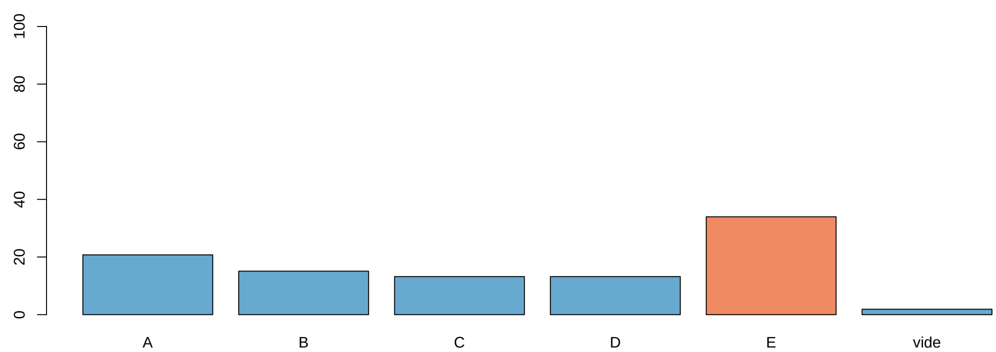
soit

$$\binom{6}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{4}{6}\right)^3+\binom{6}{4}\binom{2}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{4}{6}\right)^1$$

(dans le premier cas, il faut placer les 1, et dans le second, on place les 1, puis les 2 (dans les places qui restent)). Ceci fait

$$\frac{5\cdot 4^4}{6^6}+\frac{5\cdot 4}{6^5}\sim 0.03000686$$

qui correspond à la réponse E.



$\boxed{14}$ Les événements exhaustifs A et B (c'est-à-dire $A \cup B = S$) sont définis sur le même espace de probabilités S. À partir de $P(A) = \dfrac{1}{4}$ et $P(A|B) = \dfrac{1}{5}$, calculer $P(B|A)$.

A) $\dfrac{15}{16}$ B) $\dfrac{1}{5}$ C) $\dfrac{3}{4}$ D) $\dfrac{1}{4}$ E) $\dfrac{3}{16}$

A et B sont exhaustifs, $A \cup B = S$ (ou Ω, i.e. $\mathbb{P}(A \cup B) = 1$). Pour calculer $\mathbb{P}(B|A)$, on utilise

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$

(obtenu en utilisant la formule de Bayes). Or

$$\mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1 = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A|B)$$

donc on peut obtenir l'expression de $\mathbb{P}(B)$,

$$\mathbb{P}(B) \cdot [1 - \mathbb{P}(A|B)] = 1 - \mathbb{P}(A)$$

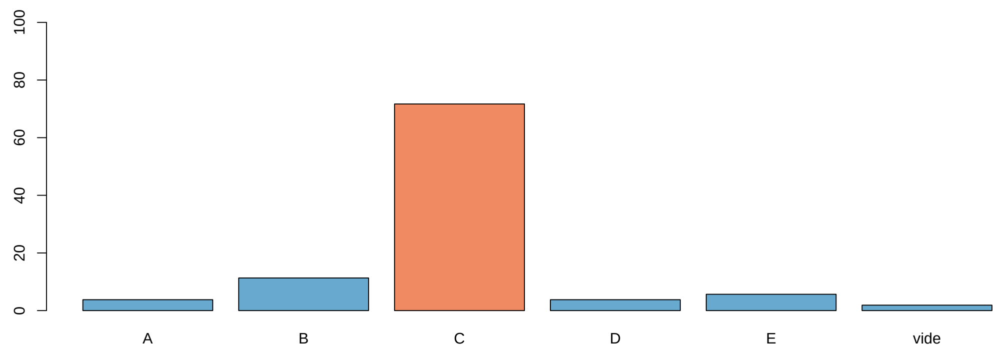
soit, par substitution des valeurs numériques,

$$\mathbb{P}(B) \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{4} \text{ soit } \mathbb{P}(B) = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} = \frac{15}{16}$$

et donc, en reportant dans la première expression

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\dfrac{1}{4} + \dfrac{15}{16} - 1}{\frac{1}{4}} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

La bonne réponse était C.



$\boxed{15}$ On vous convie à un rendez-vous avec un(e) charmant(e) étudiant(e) choisi(e) aléatoirement dans le groupe ayant les données ci-dessous. Vous le (la) rencontrez sous la neige. Ses cheveux sont complètement couverts. Cependant ses jolis yeux bleus vous souhaitent la bienvenue. Calculer la probabilité pour qu'il(elle) soit blond(e).

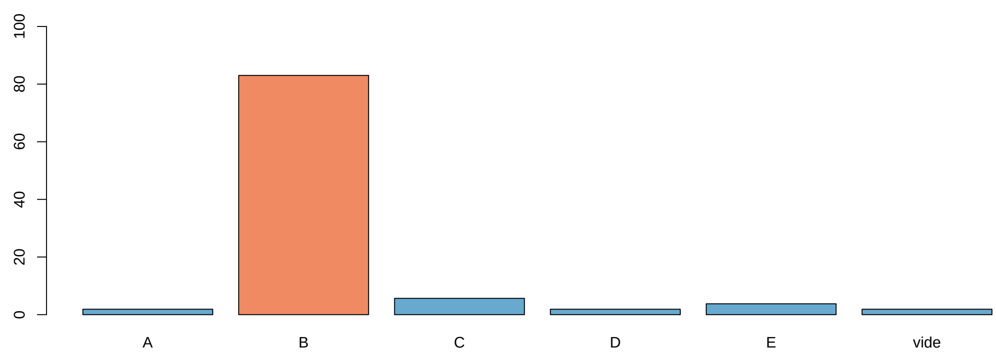
	couleur des cheveux		
couleur des yeux	blond	brun	noir
bleu	15	9	1
brun	8	12	0

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{15}{23}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{107}{405}$

On veut $\mathbb{P}(\text{blond}|\text{yeux bleux})$, soit, par la formule de Bayes

$$\mathbb{P}(\text{blond}|\text{yeux bleux}) = \frac{\mathbb{P}(\text{blond} \cap \text{yeux bleux})}{\mathbb{P}(\text{yeux bleux})} = \frac{15}{15+9+1} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}.$$

Oui, c'était une question cadeau. La bonne réponse était B.



$\boxed{16}$ Le portfolio d'un assureur comprend 25% d'assurés de moins de 30 ans et 75% d'assurés de plus de 30 ans. Pour un assuré de moins de 30 ans le nombre d'accidents en une année suit une loi binomiale avec $n = 2$ et $p = 0.02$, pour ceux de plus de 30 ans c'est une Bernoulli avec $p = 0.01$. Si un assuré n'a pas eu d'accident l'an dernier, trouver la probabilité qu'il n'ait pas d'accident cette année.

A) 0.9824 B) 0.9826 C) 0.9828 D) 0.9830 E) 0.9832

Le nombre d'accident l'année passée est N_0 et cette année N_1. On sait que

$$N_i|A \leq 30 \sim \mathcal{B}(2, .02) \text{ et } N_i|A > 30 \sim \mathcal{B}(1, .01)$$

En fait, je devrais indexer par l'age A_i car l'age peut changer, entre les deux années. Mais ca complique le problème. En particulier, j'ai un soucis si l'assuré avait 30 ans l'an passé, et 31 cette année. Mais regardons le cas 'simplfié', où on suppose que les assurés de moins de 30 ans ont avaient 29 ans, ou moins, l'an passé.

On nous demande $\mathbb{P}(N_1 = 0|N_0 = 0)$. On avait fait un exercice similaire en cours (corrigé sur le blog). Le plus simple est d'écrire

$$\mathbb{P}(N_1 = 0|N_0 = 0) = \mathbb{P}_0(N_1 = 0)$$

On utilise alors la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}_0(N_1 = 0) = \mathbb{P}_0(N_1 = 0|A \leq 30) \cdot \mathbb{P}_0(A \leq 30) + \mathbb{P}_0(N_1 = 0|A > 30) \cdot \mathbb{P}_0(A > 30)$$

Ici, avec la formule de Bayes,

$$\mathbb{P}_0(A \leq 30) = \mathbb{P}(A \leq 30|N_0 = 0) = \frac{\mathbb{P}(A \leq 30)}{\mathbb{P}(N_0 = 0)}\mathbb{P}(N_0 = 0|A \leq 30)$$

Or

$$\mathbb{P}_0(A \leq 30) = \frac{.25}{.25 \cdot .98^2 + .75 \cdot .99}.98^2 \sim 0.244444$$

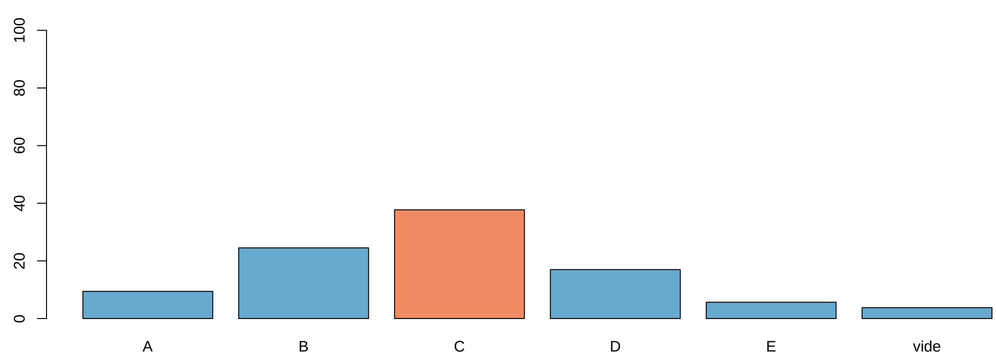
et, par indépendance conditionnellement à l'âge,

$$\mathbb{P}_0(N_1 = 0|A \leq 30) = \mathbb{P}(N_1 = 0|A \leq 30) = .98^2$$

(avec une relation du même genre pour l'autre terme). Aussi,

$$\mathbb{P}_0(N_1 = 0) = 0.244444 \cdot .98^2 + (1 - 0.2444444) \cdot .99 \sim 0.9828$$

qui est la réponse C



$\boxed{17}$ Cent individus regroupés en dix groupes de dix participent à une longue étude portant sur leurs habitudes de consommation. On estime à 10% la probabilité qu'une personne abandonne avant la fin de l'étude et on considère que l'étude est validée pour un groupe si au moins huit des dix membres du groupe l'ont complétée.

Trouver la probabilité que l'étude soit validée pour au moins neuf des dix groupes.

A) 84.76% B) 80.22% C) 75.35% D) 70.88% E) 65.06%

On veut la probabilité que l'étude soit invalide pour 0 ou pour 1 groupe, sur les 10.

La probabilité qu'un groupe ne soit validé est que 3 personnes, ou plus, aient abandonné. Le nombre d'abandon N suit ici une loi binomiale $\mathcal{B}(10, 1/10)$. Donc la probabilité qu'un groupe soit invalide est

$$\mathbb{P}(N \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(N \leq 2) = 1 - \mathbb{P}(N \in \{0, 1, 2\})$$

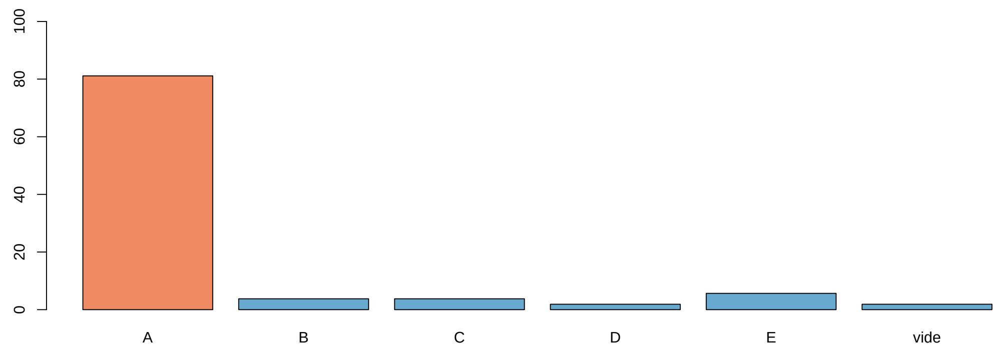
soit

$$\mathbb{P}(N \geq 3) = 1 - \binom{10}{0} .1^0 \cdot .9^{10} - \binom{10}{1} .1^1 \cdot .9^9 - \binom{10}{2} .1^2 \cdot .9^8 \sim 0.07019 = p$$

Maintenant, le nombre de groupe M sur lequel l'étude est invalide suit une loi binomiale $\mathcal{B}(10, p)$. Pour avoir au moins 9 groupes valides, il faut

$$\mathbb{P}(M \leq 1) = \mathbb{P}(M \in \{0, 1\}) = \binom{10}{0} p^0 \cdot (1-p)^{10} + \binom{10}{1} p^1 \cdot (1-p)^9 \sim 0.8476$$

qui correspond à la réponse A.



$\boxed{18}$ Une compagnie d'assurance détermine que le nombre N de réclamations durant une année est tel que $P(N = n) = \frac{1}{2^{n+1}}$. Trouver la probabilité qu'il y ait un nombre impair de réclamations durant une année donnée.

A) $\dfrac{1}{2}$ B) $\dfrac{2}{3}$ C) $\dfrac{16}{27}$ D) $\dfrac{1}{3}$ E) $\dfrac{11}{27}$

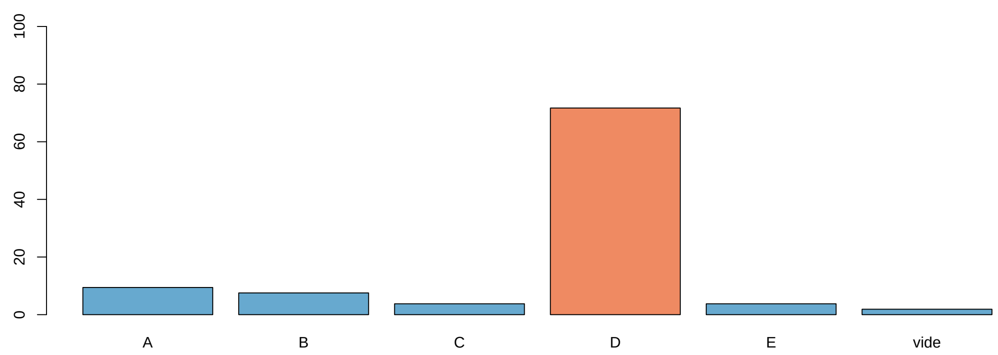
Lançons nous,

$$\mathbb{P}(N \text{ impair}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(N = 2k - 1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{(2k-1)+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k}$$

On reconnait ici une série géométrique, de raison 1/4... mais elle ne commence pas en 0, donc on met le premier terme en facteur, et la somme devient

$$\mathbb{P}(N \text{ impair}) = \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - 1/4} = \frac{1}{3}$$

qui est la réponse D.



$\boxed{19}$ Soit X et Y des variables discrètes de distribution conjointe donnée par le tableau suivant :

		X		
		1	2	3
Y	1	1/12	1/6	0
	2	1/18	13/36	1/3

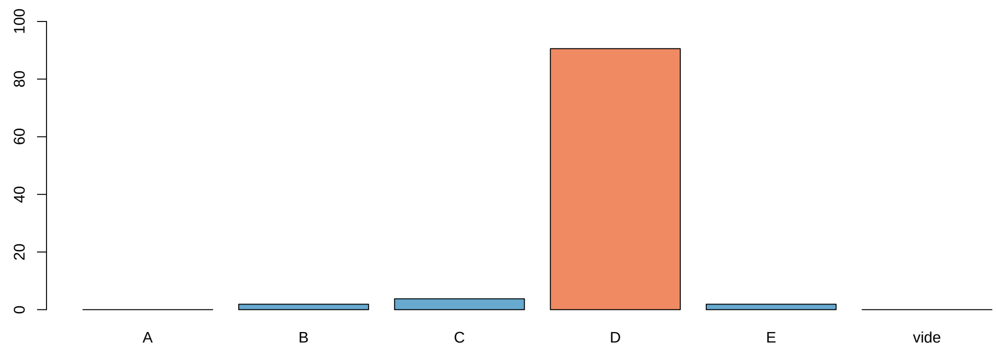
Trouver $P(X \leq 2)$

A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{5}{36}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{3}$

On veut $\mathbb{P}(X \leq 2)$. Ben... c'est juste

$$\mathbb{P}(X \leq 2) = 1 - \mathbb{P}(X \geq 3) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

et c'est tout. Donc on retient la réponse D.



$\boxed{20}$ Pour les variables aléatoires du problème 15 (comme annoncé lors de l'examen, il y avait une petite coquille : il fallait lire 19 au lieu de 15), trouver $P(X \geq 2 \mid Y \geq 2)$.

A) $\frac{12}{31}$ B) $\frac{12}{36}$ C) $\frac{25}{27}$ D) $\frac{31}{36}$ E) $\frac{5}{36}$

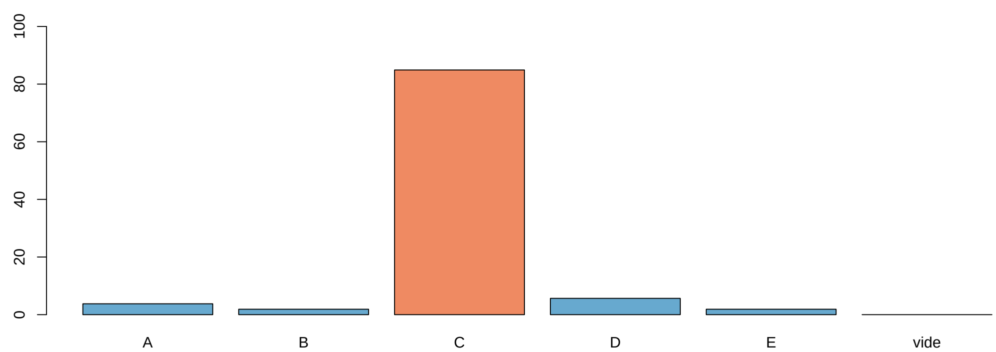
C'est parti

$$\mathbb{P}(X \leq 2|Y \geq 2) = \frac{\mathbb{P}(X \leq 2 \cap Y \geq 2)}{\mathbb{P}(Y \geq 2)}$$

et on regarde maintenant dans le tableau,

$$\mathbb{P}(X \leq 2|Y \geq 2) = \frac{13/36 + 1/3}{1/18 + 13/36 + 1/3} = \frac{25}{27}$$

qui correspond à la réponse C.



$\boxed{21}$ Une compagnie d'assurance fait subir à chaque détenteur potentiel d'une police un examen pour détecter la haute tension artérielle. Soit X la variable aléatoire nombre d'examens complétés afin de trouver la première personne qui démontre une haute tension artérielle. On a $E[X] = 12.5$. Calculer la probabilité que la $6^{\text{ième}}$ personne qui subit un examen soit la première à avoir une haute tension (c'est-à-dire $P(X = 6)$).

A) 0.053 B) 0.080 C) 0.316 D) 0.394 E) 0.480

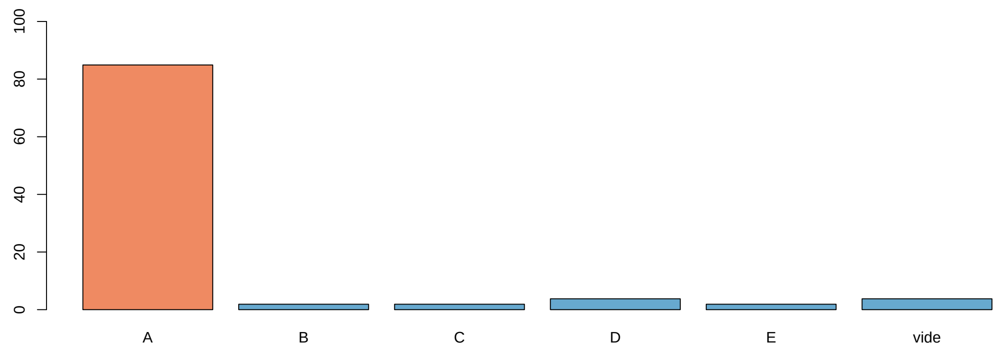
On a ici une loi géométrique. On complète les examens. Donc il faut au moins faire un examen avant de trouver quelqu'un, c'est donc la loi géométrique qui commence en 1 (pas celle qui commence en 0). C'est donc *la* loi géométrique. Celle dont l'espérance est $1/p$. Ici, on a $p = 1/12.5 = 2/25$. On veut calculer $\mathbb{P}(X = 6)$, soit ici

$$\mathbb{P}(X = 6) = \left(1 - \frac{2}{25}\right)^5 \cdot \frac{2}{25}$$

(les 5 premières ont une tension faible, pas la 6ième). Soit

$$\mathbb{P}(X = 6) = \frac{2 \cdot 23^5}{25^6} = \frac{12872686}{244140625} = 0.052726$$

qui correspond à la réponse A.



$\boxed{22}$ Pour les assurés d'une compagnie le nombre N de réclamations durant une année est tel que $P(N=n) = k\frac{2^{4n}}{3^{3n+1}}$ où k est une constante.

Trouver la probabilité qu'il y ait exactement une réclamation durant l'année.

A) $\dfrac{16}{81}$ B) $\dfrac{1}{3}$ C) $\dfrac{176}{729}$ D) $\dfrac{16}{99}$ E) $\dfrac{16}{729}$

On nous donne la probabilité, à une constante près. Il va falloir la calculer. Allez, on se lance

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N=n) = k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{4n}}{3^{3n+1}} = 1$$

Il va falloir regarder un peu cette somme

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{4n}}{3^{3n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3}\frac{2^{4n}}{3^{3n}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2^4}{3^3}\right)^n$$

soit

$$\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{16}{27}\right)^n = \frac{1}{3}\frac{1}{1-16/27} = \frac{1}{3}\frac{27}{11} = \frac{9}{11}$$

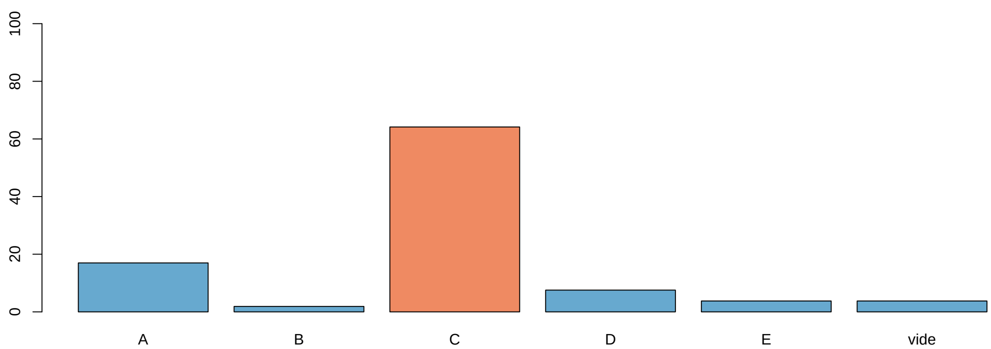
Bref, si on veut effectivement avoir une loi de probabilité, il va falloir choisir k tel que

$$k \cdot \frac{9}{11} = 1 \text{ soit } k = \frac{11}{9}$$

On notera qu'on a reconnu, au passage, la loi géométrique, de probabilité $p = 11/27$ (mais celle qui commence en 0). Ici,

$$\mathbb{P}(N = 1) = k\frac{2^4}{3^{3+1}} = \frac{11}{9}\frac{16}{81} = \frac{176}{729}$$

On reconnaît la réponse C.



$\boxed{23}$ Si X et Y sont des variables aléatoires discrètes dont la fonction de probabilité conjointe est $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{21}(x + y)$ pour $x = 1, 2, 3$ et $y = 1, 2$.
La fonction de densité de X sachant que $Y = 2$ sera :

A) $\dfrac{1}{21}(x + 2),\ x = 1, 2, 3$ B) $\dfrac{x + 2}{2x + 3},\ x = 1, 2, 3$ C) $\dfrac{1}{12}(x + 2),\ x = 1, 2, 3$

D) $x + 2,\ x = 1, 2, 3$ E) $\dfrac{x + 2}{8},\ x = 1, 2, 3$

Bon, on l'avait fait en classe cet exercice, c'était cadeau... On veut $\mathbb{P}(X = x|Y = 2)$, mais on sait (formule de Bayes) que cette probabilité s'écrit

$$\frac{\mathbb{P}(X = x \cap Y = 2)}{\mathbb{P}(Y = 2)}$$

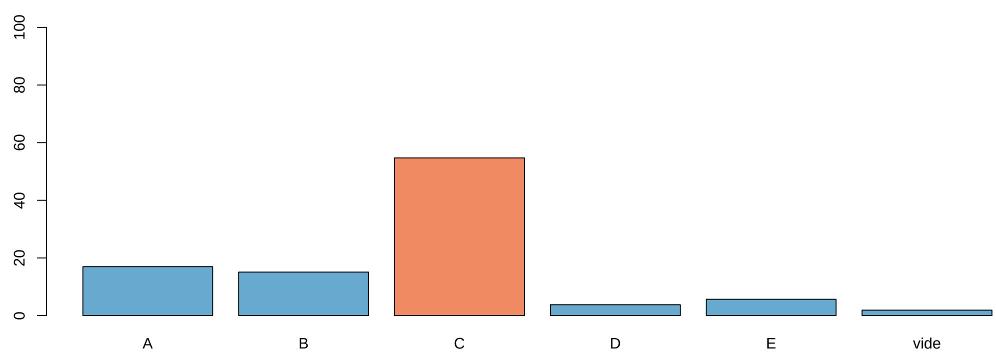
pour la partie du numérateur, c'est facile, c'est $f(x, 2)$. Pour le dénominateur, il va falloir le calculer, mais là encore, rien de bien méchant, car on a la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(Y = 2) = \sum_x f(x, 2) = \frac{1}{21}(3 + 4 + 5) = \frac{12}{21}$$

Aussi,

$$\mathbb{P}(X = x|Y = 2) = \frac{21}{12}\frac{x + 2}{21} = \frac{x + 2}{12}$$

pour $x = 1, 2, 3$. C'est la réponse C.



$\boxed{24}$ Une secrétaire juridique doit dactylographier un document de 200 pages. On suppose que sur toute page qu'elle tape le nombre d'erreurs typographiques suit une loi de Poisson de 3 erreurs par deux pages. De plus, toute page où elle a fait 3 erreurs ou plus doit être retapée. Trouver l'espérance du nombre de pages tapées pour aboutir à un document "correct" (c'est-à-dire avec pas plus de 2 coquilles par page).

A) 38.23 B) 47.28 C) 238.23 D) 273.97 E) 247.27

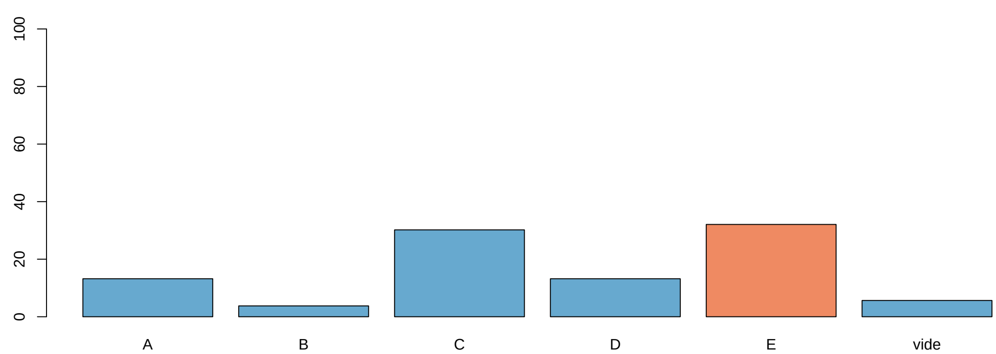
Sur toute page, le nombre d'erreurs suit une loi de Poisson de paramètre 3/2. La probabilité de retaper une page est alors la probabilité que notre loi de Poisson excède 3, i.e.

$$\mathbb{P}(3 \text{ fautes ou plus}) = 1 - \left(e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda}\right) \sim 0.19115 = p.$$

On note N_i le nombre de pages qui seront (re)tapées i fois. On note que $N_0 = 200$, que $N_1 \sim \mathcal{B}(N_0, p)$, puis que $N_2 \sim \mathcal{B}(N_1, p)$, etc. Par indépendance, on doit pouvoir montrer que $\mathbb{E}(N_i) = \mathbb{E}(N_{i-1}) \cdot p$. Donc en itérant, $\mathbb{E}(N_i) = N_0 \cdot p^i$. Aussi, l'espérance du nombre de pages tapées est

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{\infty} N_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E}(N_i) = N_0 \left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i\right) = \frac{N_0}{1-p} \sim 247.27$$

qui est la réponse E.



$\boxed{25}$ On suppose que le nombre de tremblements de terre en t années, soit $N(t)$, suit une loi de Poisson de moyenne $10t$. De plus tout tremblement de terre a une probabilité 0.01 d'être majeur, c'est-à-dire 5 ou plus à l'échelle Richter.

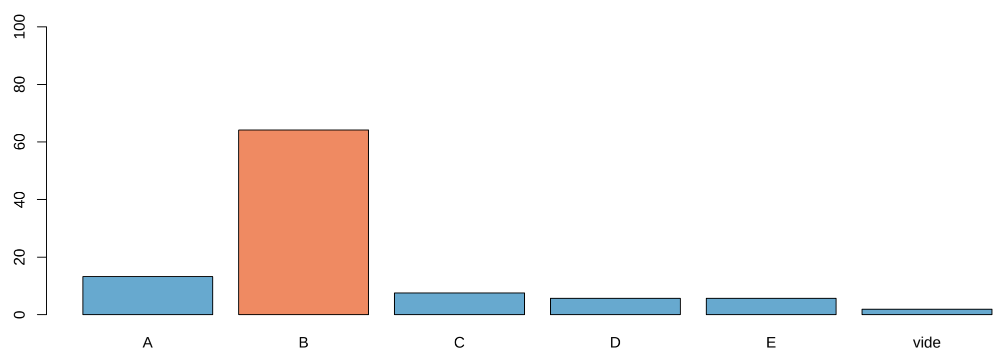
Trouver la probabilité que pendant une période de 3 ans il y ait au moins un tremblement de terre majeur.

A) 0.175 B) 0.259 C) 0.300 D) 0.325 E) 0.505

On avait reparlé du processus de Poisson en cours... $N(t)$ suit une loi de Poisson $P(\text{majeur} \cdot \lambda \cdot t)$ avec $\lambda = 10$ et ici $t = 3$ ans. Bref, le paramètre de la loi de Poisson est ici 0.3. Si on veut au moins un tremblement de terre, on calcule

$$\mathbb{P}(N(3) \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(N(3) = 0) = 1 - e^{-0.3} \sim 0.259$$

qui est la réponse B.



Les questions suivantes n'ont pas été prises en compte pour la correction. Je ne les corrigerais donc pas. Si quelqu'un a des soucis pour trouver une réponse qui lui semble valide, on peut en rediscuter en cours...

$\boxed{26}$ Le nombre N de réclamations suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 0.6$. Le montant X de toute réclamation (indépendamment des autres) suit une loi discrète de distribution $P(X = 1) = 0.2$, $P(X = 2) = 0.3$, $P(X = 3) = 0.5$. Trouver la probabilité que la réclamation totale S, soit 3 ou plus.

A) 0.2426 B) 0.2626 C) 0.2826 D) 0.3026 E) 0.3226

$\boxed{27}$ Soit X une variable aléatoire discrète suivant une loi de Poisson de moyenne 2.5. Quel est le mode de X ?

A) 1 B) 0.257 C) 2.5 D) 2 E) 0

$\boxed{28}$ Nous sommes en l'an 2245 et la compagnie Wawanasa assure un grand nombre de navettes spaciales, chacune de valeur 100 millions de dollars. Le nombre de navettes détruitent durant une année suit une loi de Poisson de moyenne 2. Wawanasa rembourse pour un maximum de quatre navettes par année. Trouver l'écart-type du montant (en millions) du remboursement durant une année.

A) 184.8 B) 164.8 C) 144.8 D) 124.8 E) 104.8

$\boxed{29}$ Le nombre d'accidents de voitures par jour durant le mois de mai au coin des rues St-Denis et Sherbrooke suit une loi de Poisson de moyenne 2. En supposant l'indépendance d'un jour à l'autre, trouver la probabilité que sur une période de 4 jours en mai il y ait exactement deux accidents au coin de St-Denis et Sherbrooke.

A) $32e^{-8}$ B) $64e^{-8}$ C) $16e^{-4}$ D) $36e^{-6}$ E) $16e^{-8}$

$\boxed{30}$ Au service d'urgence d'un hôpital, le nombre de décès par jour suit une loi de Poisson de moyenne 2.

Quelle est la probabilité qu'en 5 jours consécutifs, il y ait un seul décès en tout ?

A) $10e^{-10}$ B) $5e^{-5}$ C) $32e^{-10}$ D) $5e^{-1}(1-e^{-1})^4$ E) $5e^{-2}(1-e^{-2})^4$