ACTUARIAT 1, ACT 2121, AUTOMNE 2013 #6

ARTHUR CHARPENTIER

$\boxed{1}$ Supposons que le nombre X de coups de téléphone durant une heure suive une loi de Poisson avec moyenne λ. Sachant que $P(X = 1 \mid X \leq 1) = 0.8$, trouver λ.

A) 4 B) $-\ln(0.2)$ C) 0.8 D) 0.25 E) $-\ln(0.8)$

$\boxed{2}$ Soit X le nombre hebdomadaire d'accidents dans une petite ville. On suppose que X suit une loi de Poisson de moyenne 3. Trouver la probabilité qu'il y ait un seul accident durant les deux prochaines semaines.

A) 0.0149 B) 0.299 C) 0.333 D) 0.149 E) 0.500

$\boxed{3}$ Le nombre d'accidents en un an dans un village suit une loi de Poisson de moyenne 5. Trouver la probabilité qu'il y ait dans ce village un nombre pair d'accidents l'an prochain.

A) $\dfrac{2}{e}$ B) $\dfrac{1}{3}$ C) $\dfrac{1}{2}$ D) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{e^{-10}}{2}$ E) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2e^5}$

$\boxed{4}$ Un actuaire estime que le nombre N de réclamations suit une loi de Poisson. Trouver Var$[N]$ sachant que $\dfrac{P(N=2)}{P(N=4)} = 3$.

A) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ B) 2 C) 1 D) 4 E) $\sqrt{2}$

$\boxed{5}$ Le nombre N de réclamations d'une police suit une loi de Poisson de paramètre λ. Si la probabilité d'avoir un nombre pair de réclamations est le double de celle d'en avoir un nombre impair alors que vaut λ ?

A) 2 B) $\ln 3$ C) $\ln\sqrt{3}$ D) 1 E) 3

$\boxed{6}$ Calculer $E[X]$ sachant que X suit une loi de Poisson et que l'on a :

$$2P(X=2) = P(X=1) + 2P(X=0).$$

A) 1 B) $\dfrac{3}{2}$ C) 2 D) 3 E) $\dfrac{1}{2}$

$\boxed{7}$ Dans un livre, il y a une moyenne de 3 erreurs typographiques en 10 pages. De plus, les chapitres du livre ont tous 35 pages. En supposant une distribution de Poisson, trouver la probabilité que le chapitre 1 ainsi que le chapitre 5 comprennent chacun exactement 10 erreurs typographiques.

A) 15% B) 5.5% C) 1.5% D) 0.5% E) 0.12%

$\boxed{8}$ À un coin de rue, il passe en moyenne 1 taxi à toutes les 5 minutes suivant un processus de Poisson. La semaine prochaine (du lundi au vendredi), vous vous rendrez tous les matins à ce coin de rue pour prendre un taxi. Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement 3 matins où 15 minutes s'écouleront sans aucun taxi ?

A) 0.000222 B) 0.022222 C) 0.000111 D) 0.001115 E) 0.011115

$\boxed{9}$ Le nombre d'accidents en un an dans un village suit une loi de Poisson de moyenne 5. Trouver la probabilité qu'il y ait dans ce village un nombre impair d'accidents l'an prochain.

A) $\dfrac{1}{e^5}$ B) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{e^{-10}}{2}$ C) $\dfrac{1}{2}$ D) $\dfrac{2}{e}$ E) $\dfrac{1}{3}$

$\boxed{10}$ Le nombre X de questions durant une heure de disponibilité de votre dévoué professeur suit une loi de Poisson de moyenne λ. Trouver λ sachant que $P(X = 1 \mid X \leq 1) = \dfrac{4}{5}$.

A) 4 B) $-\ln(0.2)$ C) $\dfrac{4}{5}$ D) $\dfrac{1}{4}$ E) $-\ln(0.8)$

$\boxed{11}$ Soit X_1, X_2, X_3, X_4 et X_5 des variables aléatoires indépendantes toutes de loi de Poisson de paramètres respectifs $3, 1, 2, 1$ et 4. Trouver la probabilité que $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$ soit au plus 2.

A) e^{-11} B) $\dfrac{145}{2}e^{-11}$ C) $3e^{-11}$ D) $133e^{-11}$ E) $\dfrac{1}{11}$

$\boxed{12}$ Un actuaire constate que la probabilité qu'un assuré n'ait aucun accident est dix fois plus grande que celle d'en avoir au moins un durant l'année. En supposant que le nombre d'accidents de l'assuré suit une loi de Poisson, trouver la probabilité que l'assuré ait exactement deux accidents durant l'année.

A) 0.41 B) 0.041 C) 0.032 D) 0.0032 E) 0.0041

$\boxed{13}$ Le portfolio d'une compagnie d'assurance comprend 10% d'assurés à hauts risques (respectivement 90% d'assurés à bas risques). Le nombre de réclamations par an suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 0.6$ pour les hauts risques (respectivement $\lambda = 0.1$ pour les bas risques). En supposant l'indépendance d'une année à l'autre, calculer l'espérance du nombre de réclamations en 2011 pour un client ayant fait exactement une réclamation en 2010.

A) 0.15 B) 0.21 C) 0.24 D) 0.27 E) 0.30

$\boxed{14}$ Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson.
Que vaut $P(X \geq 2)$ si $P(X = 0) = 2P(X = 1)$?

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{2}{3}e^{-1/3}$ C) $1 - \frac{2}{3}e^{-1/2}$ D) $1 - \frac{3}{2}e^{-1/2}$ E) $1 - 3e^{-2}$

$\boxed{15}$ Le nombre de nids-de-poules sur 100 mètres d'une rue de Montréal suit une loi de Poisson de moyenne 0.3. Trouver la probabilité que sur une distance d'un kilomètre de cette rue il y ait 5 nids-de-poules ou moins.

A) 0.92 B) 0.09 C) 0.82 D) 0.5 E) 0.33

$\boxed{16}$ Supposons que le nombre d'erreurs typographiques par page dans les notes du cours ACT2121 suive une loi de Poisson de paramètre λ. Trouver la probabilité que dans 10 pages prises au hasard il y ait un total d'exactement 10 erreurs typographiques.

A) $\dfrac{10^{10}\lambda^{10}e^{-10\lambda}}{10!}$ B) $(\lambda e^{-\lambda})^{10}$ C) $(1-e^{-\lambda})^{10}$ D) $10\lambda e^{-\lambda}$ E) $\dfrac{10\lambda^{10}e^{-10\lambda}}{10!}$

$\boxed{17}$ Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson.
Si on a $F_X(2)/F_X(1) = 2.6$ alors trouver la moyenne de X.

A) 4 B) 2.6 C) 2 D) 1 E) 0.8

$\boxed{18}$ Au service d'urgence d'un hôpital, le nombre d'arrivées entre 13h et 14h suit une loi de Poisson de moyenne 2. On observe pendant 5 jours consécutifs, les arrivées entre 13h et 14h. Quelle est la probabilité que parmi ces 5 jours, il y ait exactement 2 jours avec aucune arrivée entre 13h et 14h ?

A) 0.118 B) 0.012 C) 0.221 D) 0.021 E) 0.988

$\boxed{19}$ Supposons que le nombre X de coups de téléphone durant une heure suive une loi de Poisson avec moyenne λ. Sachant que $P(X = 1 \mid X \leq 2) = 0.4$, trouver λ.

A) 4 B) 3 ou 4 C) 2 ou 3 D) 1 ou 2 E) $\dfrac{3}{2}$

$\boxed{20}$ Dans une grande ville américaine le nombre de meurtres par mois suit une loi de Poisson de moyenne 5.

Trouver la probabilité que durant une année, il y ait exactement 2 mois de 2 meurtres.

A) 0.084 B) 0.84 C) 0.12 D) 0.194 E) 0.007

$\boxed{21}$ Pour une compagnie d'assurance auto, 75% des conducteurs sont dans la classe A et 25% dans la classe B. Le nombre d'accidents pendant une période de 3 ans pour un conducteur de classe A (respectivement B) suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 2$ (respectivement $\lambda = 3$). Sachant qu'un conducteur pris au hasard a eu exactement un accident durant la période de 3 ans, trouver la probabilité qu'il soit de classe B.

A) 0.105 B) 0.112 C) 0.130 D) 0.155 E) 0.200

$\boxed{22}$ Supposons que le nombre N de coups de téléphone reçus en une heure dans le bureau d'une compagnie d'assurance suive une loi de Poisson. Supposons qu'il y a autant de chances de recevoir deux coups de téléphone que quatre durant une heure quelconque. Trouver la probabilité qu'en 3 heures la compagnie reçoive un total de deux coups de téléphone.

A) 0.0171 B) 0.0017 C) 0.0024 D) 0.024 E) 0.0021

$\boxed{23}$ Dans un grand magasin les clients arrivent suivant une loi de Poisson de moyenne trois à la minute. Parmi les clients qui entrent au magasin, on estime que 30% n'achètent rien, 20% achètent en payant comptant, 40% achètent en payant avec une carte de crédit et 10% achètent et paient par chèque. Trouver la probabilité que parmi les clients entrés entre 10h00 et 10h00 et 5 minutes, 5 ont payé avec une carte, 2 ont payé avec un chèque et 3 ont payé comptant.

A) 0.090 B) 0.122 C) 0.012 D) 0.009 E) 0.001

$\boxed{24}$ Soit X et Y deux lois de Poisson indépendantes de paramètres 1 et 2 respectivement. Posons $Z = \min(X, Y)$. Trouver $P(Z = 1)$.

A) $\dfrac{1}{e^3}$ B) $\dfrac{e^2+e-3}{e^3}$ C) $\dfrac{e+1}{e^2}$ D) $\dfrac{e^2+2e-5}{e^3}$ E) $\dfrac{e^2+e+1}{e^3}$

$\boxed{25}$ Le roi Ivan III de Moldavie a beaucoup d'ennemis. Pour oublier ses ennemis il boit beaucoup de vin ; on estime que le nombre aléatoire de coupes de vin qu'il prend suit un processus de Poisson de taux 10 coupes par jour. On estime que chaque coupe a, indépendamment des autres, une probabilité 0.005 de contenir un poison mortel. Le roi utilise les services de goûteurs mais ceux-ci font semblant de boire trois fois sur quatre. Trouver la probabilité que le roi Ivan III meurt empoisonné en buvant une coupe de vin d'ici 50 jours.

A) 15.3% B) 23.3% C) 42.3% D) 46.5% E) 84.7%

$\boxed{26}$ Une secrétaire juridique doit dactylographier un document de 200 pages. On suppose que sur toute page qu'elle tape le nombre d'erreurs typographiques suit une loi de Poisson de 3 erreurs par deux pages. De plus, toute page où elle a fait 3 erreurs ou plus doit être retapée. Trouver l'espérance du nombre de pages tapées pour aboutir à un document "correct" (c'est-à-dire avec pas plus de 2 coquilles par page).

A) 38.23 B) 47.28 C) 238.23 D) 273.97 E) 247.27

$\boxed{27}$ On suppose que le nombre de tremblements de terre en t années, soit $N(t)$, suit une loi de Poisson de moyenne $10t$. De plus tout tremblement de terre a une probabilité 0.01 d'être majeur, c'est-à-dire 5 ou plus à l'échelle Richter. Trouver la probabilité que pendant une période de 3 ans il y ait au moins un tremblement de terre majeur.

A) 0.175 B) 0.259 C) 0.300 D) 0.325 E) 0.505

$\boxed{28}$ Le nombre N de réclamations suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 0.6$. Le montant X de toute réclamation (indépendamment des autres) suit une loi discrète de distribution $P(X = 1) = 0.2,\ P(X = 2) = 0.3,\ P(X = 3) = 0.5$. Trouver la probabilité que la réclamation totale S, soit 3 ou plus.

A) 0.2426 B) 0.2626 C) 0.2826 D) 0.3026 E) 0.3226

$\boxed{29}$ Soit X une variable aléatoire discrète suivant une loi de Poisson de moyenne 2.5. Quel est le mode de X ?

A) 1 B) 0.257 C) 2.5 D) 2 E) 0

$\boxed{30}$ Nous sommes en l'an 2245 et la compagnie Wawanasa assure un grand nombre de navettes spaciales, chacune de valeur 100 millions de dollars. Le nombre de navettes détruitent durant une année suit une loi de Poisson de moyenne 2. Wawanasa rembourse pour un maximum de quatre navettes par année.
Trouver l'écart-type du montant (en millions) du remboursement durant une année.

A) 184.8 B) 164.8 C) 144.8 D) 124.8 E) 104.8

$\boxed{31}$ Le nombre d'accidents de voitures par jour durant le mois de mai au coin des rues St-Denis et Sherbrooke suit une loi de Poisson de moyenne 2. En supposant l'indépendance d'un jour à l'autre, trouver la probabilité que sur une période de 4 jours en mai il y ait exactement deux accidents au coin de St-Denis et Sherbrooke.

A) $32e^{-8}$ B) $64e^{-8}$ C) $16e^{-4}$ D) $36e^{-6}$ E) $16e^{-8}$

$\boxed{32}$ Au service d'urgence d'un hôpital, le nombre de décès par jour suit une loi de Poisson de moyenne 2.
Quelle est la probabilité qu'en 5 jours consécutifs, il y ait un seul décès en tout ?

A) $10e^{-10}$ B) $5e^{-5}$ C) $32e^{-10}$ D) $5e^{-1}(1-e^{-1})^4$ E) $5e^{-2}(1-e^{-2})^4$

$\boxed{33}$ Supposons que le nombre X de coups de téléphone durant une heure suive une loi de Poisson avec moyenne λ. Sachant que $P(X = 0 \mid X \leq 2) = 0.2$, trouver λ.

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) $\frac{1}{2}$

$\boxed{34}$ Les nombres L_1 et L_2 d'accidents graves de circulation par semaine dans les villes de Laval et Longueuil respectivement, suivent des lois de Poisson de moyenne $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = 2$ respectivement. Soit p_1 (respectivement p_2) la probabilité qu'il y ait à Laval (respectivement à Longueuil) strictement plus d'accidents graves de circulation que prévu en moyenne pour cette ville. Que vaut p_1/p_2 ?

A) 0.67 B) 0.80 C) 1.09 D) 1.25 E) 1.5

$\boxed{35}$ Soit X une variable aléatoire discrète suivant une loi de Poisson de moyenne 6.5. Quel est le mode de X ?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

$\boxed{36}$ Le nombre d'accidents de voitures par jour durant le mois de mai au coin des rues St-Denis et Sherbrooke suit une loi de Poisson de moyenne 3. En supposant l'indépendance d'un jour à l'autre, trouver la probabilité que sur une période de 4 jours en mai il y ait exactement douze accidents au coin de St-Denis et Sherbrooke.

A) e^{-1} B) $(3e^{-3})^4$ C) $\frac{12^{12}}{12!}e^{-12}$ D) $12e^{-12}$ E) $\frac{12^{12}}{12!}$

$\boxed{37}$ Soit X_1, X_2, X_3, X_4 et X_5 des variables aléatoires indépendantes toutes de loi de Poisson de paramètres respectifs $1, 2, 3, 4$ et 5. (6)

Trouver la probabilité que $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$ soit au plus 2.

A) e^{-15} B) $\frac{257}{2}e^{-15}$ C) $3e^{-15}$ D) $241e^{-15}$ E) $\frac{1}{15}$

$\boxed{38}$ Pour une compagnie d'assurance 60% des conducteurs sont dans la classe A et 40% dans la classe B. Le nombre d'accidents pendant une période de 3 ans pour un conducteur de classe A (respectivement B) suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 2$ (respectivement $\lambda = 3$). Sachant qu'un conducteur pris au hasard a eu exactement un accident durant la période de 3 ans, trouver la probabilité qu'il soit de classe A.

A) 60% B) 64% C) 68% D) 73% E) 77%