ACTUARIAT 1, ACT 2121, AUTOMNE 2013 #9

ARTHUR CHARPENTIER

$\boxed{1}$ Soit X la variable aléatoire continue de fonction de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} (1.4)e^{-2x} + (0.9)e^{-3x} & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver $E[X]$.

A) $\dfrac{9}{20}$ B) $\dfrac{5}{6}$ C) 1 D) $\dfrac{230}{126}$ E) $\dfrac{23}{10}$

$\boxed{2}$ Soit X la variable aléatoire continue de fonction de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{k^2} & \text{pour } 0 \leq x \leq k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver la valeur de k telle que la variance de X soit 2.

A) 2 B) 6 C) 9 D) 18 E) 36

$\boxed{3}$ Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes telles que $E[X] = 1$, $E[Y]$ = -1, $\text{Var}[X] = \dfrac{1}{2}$ et $\text{Var}[Y] = 2$. Calculer $E[(X+1)^2(Y-1)^2]$.

A) 1 B) $\dfrac{9}{2}$ C) 16 D) 17 E) 27

$\boxed{4}$ Une compagnie d'assurance a établi que la réclamation d'une de ses polices est une variable aléatoire continue X telle que $f_X(x) = k(1+x)^{-4},\ 0 < x < \infty$. Déterminer $E[X]$.

A) $\dfrac{1}{6}$ B) $\dfrac{1}{3}$ C) $\dfrac{1}{2}$ D) 1 E) 3

$\boxed{5}$ Une police d'assurance rembourse les dépenses d'optométrie X jusqu'à un maximum de 250\$. La fonction de densité pour X est $ke^{-0.004x}$ pour $x \geq 0$. Calculer la médiane du remboursement de cette police.

A) 161 B) 165 C) 173 D) 182 E) 250

$\boxed{6}$ Trouver l'écart-type σ_X où X est le total des réclamations des 3 500 polices indépendantes décrites dans le tableau :

Classes	Nombre	Probabilité de réclamation	Montant de la réclamation
1	1 000	0.01	1
2	2 000	0.02	1
3	500	0.04	2

A) 10 B) 10.4 C) 10.8 D) 11.2 E) 11.6

$\boxed{7}$ Les variables discrètes X et Y sont telles que $f_{X,Y}(x,y) = (x+2y)/70$ pour $x = 1, 2, 3, 4$ et $y = 1, 2, \ldots, x$ et $f_{X,Y}(x,y) = 0$ autrement. Trouver l'espérance de Y.

A) $\dfrac{11}{17}$ B) $\dfrac{33}{14}$ C) $\dfrac{10}{7}$ D) $\dfrac{12}{19}$ E) $\dfrac{1}{40}$

$\boxed{8}$ Soit X la variable aléatoire donnant le coût de la réparation s'il y a un accident d'auto. On prévoit une augmentation de 10% du coût des réparations.
De quel pourcentage la variance de X va-t-elle augmenter ?

A) 10% B) 20% C) 21% D) 0% E) 33%

$\boxed{9}$ Soit X la variable aléatoire donnant le coût de réparation (sur un an) pour une auto assurée. Si l'assurance comprend un déductible de 200\$, laquelle des intégrales suivantes donne l'espérance du montant de remboursement annuel ?

A) $\displaystyle\int_0^\infty (x-200)f_X(x)dx$ B) $\displaystyle\int_0^{200} xf_X(x)dx$ C) $\displaystyle\int_{200}^\infty (x-200)f_X(x)dx$

D) $\displaystyle\int_{200}^\infty xf_X(x)dx$ E) $E[X]-200$

$\boxed{10}$ On lance un dé à 6 faces. Si le dé fait i alors on lance i pièces de monnaie. Soit X le nombre de faces obtenues.
Trouver $E[X]$.

A) $\dfrac{14}{3}$ B) $\dfrac{7}{4}$ C) $\dfrac{7}{3}$ D) $\dfrac{7}{2}$ E) 3

$\boxed{11}$ Le petit Nestor collectionne les cartes de joueurs de Baseball dans les paquets de gommes à mâcher. Il y a en tout 20 cartes différentes (réparties aléatoirement, une par paquet). Combien de paquets de gommes Nestor devrait-il s'attendre à avoir à acheter pour obtenir la collection complète ?

A) 71.95 B) 98.41 C) 150 D) 224.67 E) 400

$\boxed{12}$ Si le coût des réparations d'automobiles augmente de 5% et X est la variable aléatoire réclamation pour les réparations. Trouver le rapport entre le pourcentage d'augmentation de la variance de X et le pourcentage d'augmentation de l'espérance de X.

A) 1 B) 0.5 C) 2 D) 2.05 E) 2.5

$\boxed{13}$ Comme cadeau de fête, oncle Philippe lance sur la table de la cuisine des pièces de monnaie. Vous gardez toutes celles qui feront face. Quelle est votre espérance de gain s'il y a : 5 pièces de 2\$, 8 pièces de 1\$, 12 pièces de 25¢, 11 pièces de 10¢ et 20 pièces de 5¢?

A) 11.50\$ B) 11.55\$ C) 23.10\$ D) 3.35\$ E) 10.55\$

$\boxed{14}$ Soit T une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 20]$. On définit X et Y, deux nouvelles variables aléatoires par :

$$X = \begin{cases} 2T & \text{si} \quad 0 < T \leq 10 \\ 0 & \text{si} \quad 10 < T \leq 20 \end{cases} \quad \text{et} \quad Y = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 < T \leq 10 \\ 4T & \text{si} \quad 10 < T \leq 20. \end{cases}$$

Calculer $\text{Var}[X + Y]$.

A) 708 B) 820 C) 924 D) 510 E) 616

$\boxed{15}$ Si X est uniforme sur l'intervalle $]0, 1]$, trouver $E[-\ln X]$.

A) -1 B) 0 C) $\dfrac{1}{e}$ D) 1 E) e

$\boxed{16}$ Soit Y la perte pour un assuré. On suppose que $f_Y(y) = 2y^{-3}$ pour $1 \leq y < \infty$. Si la police rembourse la perte au complet pour $Y \leq 10$, rembourse 10 si la perte est entre 10 et 20, et la moitié de la perte si elle dépasse 20, trouver l'espérance du remboursement.

A) 2.925 B) 2 C) 1.925 D) 3 E) 3.925

$\boxed{17}$ Le nombre de réclamations par année pour une compagnie d'assurance suit une loi de Poisson N, avec $P(N = k) = p_k$, de moyenne 1. L'actuaire décide de modifier la distribution : il pose $p_0^* = 0.5$ (la nouvelle probabilité de zéro réclamation) et $p_k^* = c \cdot p_k, k \geq 1$, pour une constante c. Trouver la nouvelle espérance du nombre de réclamations.

A) 0.21 B) 0.37 C) 0.50 D) 0.63 E) 0.79

$\boxed{18}$ Le profit pour un nouveau produit est $Z = 3X - 5 - Y$ où X et Y sont des variables aléatoires telles que $E[X] = 1, E[X^2] = 2, E[Y] = 2$ et $E[Y^2] = 6$. Trouver la variance de Z en supposant X et Y indépendantes.

A) 1 B) 5 C) 7 D) 11 E) 16

$\boxed{19}$ Une police d'assurance va rembourser 100% des frais médicaux des employés d'une compagnie jusqu'à un maximum de 1 (million de dollars). Le total des frais médicaux X est une variable aléatoire de fonction de densité (où x est en millions de dollars) :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x(4-x)}{9} & \text{pour } 0 < x < 3 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver l'espérance du montant que la compagnie s'attend à rembourser (en millions de dollars).

A) 0.120 B) 0.301 C) 0.935 D) 2.338 E) 3.495

$\boxed{20}$ Soit X le nombre de faces lorsqu'on lance quatre fois une pièce de monnaie bien équilibrée. Trouver la variance de $Y = X^2$.

A) 17.5 B) 42.5 C) 25 D) 4 E) 5

$\boxed{21}$ Une agence de voyage vend $X = 0, 1$ ou 2 voyages de rêves en Jamaïque et $Y = 0, 1, 2$ assurances annulation pour ces voyages. Le tableau suivant donne la distribution conjointe de X et Y. Trouver la variance de X.

X \ Y	0	1	2
0	1/6	0	0
1	1/12	1/6	0
2	1/12	1/3	1/6

A) 3.32 B) 2.58 C) 1.42 D) 0.83 E) 0.58

$\boxed{22}$ Le coût X d'un billet d'avion est donné par une variable aléatoire continue de moyenne 100 et variance 20. Si pour lutter contre la pollution une sur-taxe de 10% et un supplément fixe de 10$ sont imposés, que devient la nouvelle variance du coût d'un billet d'avion ?

A) 34.20 B) 22 C) 32 D) 24.20 E) 10

$\boxed{23}$ Considérons la variable aléatoire discrète X prenant les valeurs $x = -2, -1, 0, 1, 2$ avec la fonction de densité $f_X(x) = P(X = x) = (1+|x|)^2/27$. Trouver $E[|X|]$.

A) 1 B) $\frac{13}{27}$ C) $\frac{44}{27}$ D) $\frac{14}{27}$ E) $\frac{26}{27}$

$\boxed{24}$ Pour une police d'assurance les pertes possibles sont : 0, 5, 10, 100, 500 et 1 000 avec probabilités 0.9, 0.06, 0.03, 0.008, 0.001 et 0.001 respectivement. Sachant qu'il y a eu une perte strictement positive, trouver l'espérance de cette perte.

A) 2.9 B) 3.22 C) 17.04 D) 29 E) 322.2

$\boxed{25}$ La photocopieuse n'est pas très fiable. Lorsqu'on photocopie une page il y a une probabilité 0.25 qu'elle soit de mauvaise qualité (indépendamment d'une page à l'autre) et que l'on doive la reprendre. Si le texte original comprend 400 pages, combien de photocopies doit-on s'attendre en moyenne à faire afin d'obtenir une copie parfaite de l'original ?

A) 400 B) 500 C) 533.33 D) 566.67 E) 600

$\boxed{26}$ Soit X le total lorsqu'on lance 10 dés à 6 faces. Trouver l'écart-type σ_X de X.

A) $\frac{35}{12}$ B) 4.13 C) 35 D) 5.4 E) 29.2

$\boxed{27}$ La durée de vie d'un réfrigérateur de 500\$ suit une loi exponentielle de moyenne 20 ans. Un manufacturier qui a vendu 1 000 réfrigérateurs offre la garantie suivante : 500\$ s'il y a panne durant les premiers 10 ans et 250\$ s'il y a panne entre 10 et 20 ans.

Trouver l'espérance du remboursement sur les 1 000 réfrigérateurs.

A) 158 025 B) 183 950 C) 256 400 D) 316 050 E) 196 725

$\boxed{28}$ Il y a 40 étudiants dans un cours de probabilité. Trouver l'espérance du nombre de jours de l'année qui sont le jour de fête d'un seul étudiant de la classe.

A) 14.72 B) 35.94 C) 35.62 D) 40.00 E) 20.00

$\boxed{29}$ Soit R le montant aléatoire des réclamations pour une assurance auto. Si la fonction de densité de R est $f_R(r) = 3(1+r)^{-4}$ pour $0 < r < \infty$, trouver l'espérance de R.

A) 3 B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{6}$

$\boxed{30}$ Une compagnie d'assurance rembourse le montant X des soins dentaires jusqu'à un maximum de 250\$. La fonction de densité est :

$$f_X(x) = \begin{cases} ke^{-0.004x} & \text{pour } x \geq 0 \\ 0 & \text{pour } x < 0 \end{cases}.$$

Trouver la médiane du remboursement.

A) 160 B) 164 C) 173 D) 184 E) 250

$\boxed{31}$ Soit X une variable aléatoire continue prenant ses valeurs dans $[0, 2]$ et dont la fonction de densité est $f_X(x) = x/2$. Trouver $E[|X - E[X]|]$.

A) 0 B) $\frac{2}{9}$ C) $\frac{32}{81}$ D) $\frac{64}{81}$ E) $\frac{4}{3}$

$\boxed{32}$ Soit X une variable aléatoire discrète de loi de Poisson. Sachant que $E[X] = \ln 2$, trouver $E[\cos(\pi X)]$.

A) 0 B) $2 \ln 2$ C) 1 D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

$\boxed{33}$ Soit X et Y des variables aléatoires discrètes de distribution conjointe :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{9}\, 2^{x-y+1} & \text{pour } x = 1, 2 \text{ et } y = 1, 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver $E\left[\dfrac{X}{Y}\right]$.

A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{25}{18}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{5}{4}$ E) $\frac{8}{9}$

$\boxed{34}$ Une compagnie utilise un générateur électrique pour sa production, et un second si le premier tombe en panne. Les deux ont une durée de vie donnée par une loi exponentielle de moyenne 10. Trouver la variance de la durée X des opérations.

A) 200 B) 100 C) 50 D) 20 E) 10

$\boxed{35}$ Soit N la variable aléatoire discrète "nombre de lancés d'un dé à 6 faces pour obtenir pour la troisième fois un trois". Trouver $E[N]$.

A) 72 B) 18 C) 36 D) 30 E) 6

$\boxed{36}$ Une compagnie, pour produire son électricité, dispose de 3 génératrices A, B, C dont les durées de vie respectives suivent des lois exponentielles de moyenne 10, 20 et 25 respectivement. La compagnie utilise la génératrice A puis la B (lorsque la A tombe en panne) puis la C (lorsque la B tombe en panne). Soit X la durée de production d'électricité dont dispose la compagnie. Trouver le *coefficient de variation* de X, c'est-à-dire $\sigma_X/E[X]$.

A) 0.29 B) 0.37 C) 0.45 D) 0.53 E) 0.61

$\boxed{37}$ On estime que la durée de vie d'un réfrigérateur suit un loi exponentielle de moyenne 15 ans. Le vendeur offre pour 100$ la garantie suivante : si le réfrigérateur tombe en panne durant les 3 premières années vous recevez un montant x en dédommagement ; s'il tombe en panne dans les 3 années suivantes vous recevez le montant $\frac{x}{2}$. S'il tombe en panne après 6 ans, vous ne recevez rien. Pour quelle valeur de x devriez-vous acheter cette garantie ?

A) 299.45$ B) 321.45$ C) 350.00$ D) 380.55$ E) 391.43$

$\boxed{38}$ Le montant X d'une réclamation pour une police d'assurance médicale a la fonction de répartition :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)/9 & 0 \leq x \leq 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$

Trouver le mode de la distribution de X.

A) $\dfrac{2}{3}$ B) $\dfrac{3}{2}$ C) 1 D) 2 E) 3

$\boxed{39}$ Soit X une variable aléatoire continue de fonction de densité $f_X(x) = kx(1-x)$ où k est une constante et $0 < x < 1$. Trouver $\mathrm{Var}[X]$.

A) $\dfrac{1}{20}$ B) $\dfrac{1}{10}$ C) $\dfrac{1}{5}$ D) $\dfrac{1}{4}$ E) $\dfrac{1}{2}$

$\boxed{40}$ Un actuaire réalise que les détenteurs de polices d'assurance ont 3 fois plus de chance de faire 2 réclamations que d'en faire 4. Si le nombre de réclamations par détenteur est distribué selon la loi de Poisson, trouver l'écart-type du nombre de réclamations par détenteur.

A) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ B) $\sqrt{2}$ C) 1 D) 2 E) 4

$\boxed{41}$ Soit Y une variable aléatoire centrée réduite (c'est-à-dire $E[Y] = 0$ et $\mathrm{Var}[Y] = 1$) telle que $Y = aX - b$ avec $\mu_X = E[X] = 10$ et $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}[X]} = 5$. Calculer $c = b - a > 0$.

A) $0 < c < \dfrac{1}{5}$ B) $\dfrac{1}{5} \leq c < \dfrac{2}{5}$ C) $\dfrac{2}{5} \leq c < \dfrac{7}{5}$ D) $\dfrac{7}{5} \leq c < 2$ E) $c \geq 2$

$\boxed{42}$ Soit $f_X(x) = \frac{1}{2}$ pour $|x| < 1$ et $Y = 3X + 2$. Trouver la variance de Y.

A) $\dfrac{1}{4}$ B) $\dfrac{1}{3}$ C) $\dfrac{3}{4}$ D) 3 E) 9

$\boxed{43}$ Soit X le nombre d'épreuves indépendantes de Bernoulli jusqu'à l'obtention d'un premier succès. Soit Y le nombre nécessaire d'épreuves indépendantes de la même Bernouilli pour obtenir 5 succès (pour la $1^{\text{ère}}$ fois). Soit p la probabilité de succès dans une épreuve et supposons $\mathrm{Var}[X] = \frac{3}{4}$. Calculer $\mathrm{Var}[Y]$.

A) $\dfrac{3}{20}$ B) $\dfrac{15}{4}$ C) $\dfrac{75}{4}$ D) $\dfrac{3}{4}$ E) $\dfrac{3}{4\sqrt{5}}$

$\boxed{44}$ Les dépenses dentaires annuelles d'un fonctionnaire suivent une répartition uniforme sur l'intervalle de 200 à 1 200. Le régime de soins dentaires de base du gouvernement rembourse à l'employé jusqu'à un maximum de 400 les dépenses dentaires qui surviennent dans l'année tandis que le régime supplémentaire débourse jusqu'à un maximum de 500 pour toutes les dépenses dentaires additionnelles. Si Y représente les prestations annuelles payées par le régime supplémentaire à un fonctionnaire, calculer $\mathrm{Var}[Y]$.

A) 41 042 B) 32 089 C) 29 940 D) 27 320 E) 24 464

$\boxed{45}$ Soit $f_X(x) = k(2x+1)$ la fonction de densité de la variable aléatoire continue X prenant ses valeurs dans l'intervalle $[0,4]$. Trouver le $20^{\text{ième}}$ percentile de X.

A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{1+\sqrt{2}}{3}$ E) $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$

$\boxed{46}$ Chaque employé d'une grande compagnie choisit un des trois niveaux de couverture d'assurance maladie dont les primes, qui sont dénotées par X, sont 1,2, et 3 respectivement. Les primes sont sujettes à un escompte, dénoté par Y, de 0 pour les fumeurs et de 1 pour les non-fumeurs. La distribution de X et Y est donnée par :

$$P(X=x,\ Y=y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{31} & \text{pour } x=1,2,3 \text{ et } y=0,1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer la variance de $X-Y$, la prime totale payée par un employé choisi au hasard.

A) 0.54 B) 0.64 C) 0.94 D) 0.84 E) 0.74

$\boxed{47}$ Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $E[X] = 2 = \sigma_X$ et $E[Y] = -\sigma_Y = -3$. Trouver $E[X^2 + 2Y^2]$.

A) 5 B) 42 C) 49 D) 62 E) 44

$\boxed{48}$ Une police d'assurance rembourse 100% de la perte due à un accident jusqu'à un maximum de 1 000\$. La probabilité d'un accident est 0.4. Lorsqu'il y a un accident, la perte X en milliers de dollars est une variable aléatoire de fonction de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} x(4-x)/9 & \text{pour } 0 < x < 3 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver l'espérance du remboursement.

A) $\dfrac{13}{270}$ B) $\dfrac{13}{108}$ C) $\dfrac{101}{270}$ D) $\dfrac{101}{108}$ E) $\dfrac{151}{108}$

$\boxed{49}$ Le célèbre restaurant Malbouffe offre un prix de 1 000\$ à ses clients assidus. À chaque dîner, avec une probabilité de 10%, une étoile est imprimée sur la facture du client ; si un client reçoit une étoile chaque jour de la semaine, à savoir : lundi, mardi, mercredi, jeudi et vendredi, il gagne le 1 000\$. Bill (qui en passant pèse 180 kg) prévoit prendre tous ses dîners de jours de semaine les 4 prochaines semaines chez Malbouffe.
Soit X le montant aléatoire gagné par Bill ; trouver l'écart-type σ_X.

A) 1.581 B) 2.499 C) 6.325 D) 40 E) 64

$\boxed{50}$ Durant une année, le revenu aléatoire X, les dépenses aléatoires Y et un coût fixe de 100 ont engendré un profit $P = X - Y - 100$. On sait que $\text{Var}[X] = 1\,200, \text{Var}[Y] = 2\,000$ et $\text{Var}[P] = 3\,000$. Si on estime que les revenus, les dépenses et le coût fixe vont augmenter respectivement de 20%, 10% et 12%, calculer la nouvelle variance du profit pour l'année prochaine.

A) 4 148 B) 3 250 C) 3 483 D) 3 662 E) 3 884

$\boxed{51}$ Soit X et Y deux variables aléatoires dont le coefficient de corrélation est $\frac{3}{4}$. Si $E[X] = \text{Var}[X] = 1$ et $E[Y] = \text{Var}[Y] = 2$ alors trouver $\text{Var}[X + 2Y]$.

A) $3 + 3\sqrt{2}$ B) 15 C) $9 + 3\sqrt{2}$ D) $9 + \dfrac{3}{\sqrt{2}}$ E) $3 + \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

$\boxed{52}$ Richy Rich place sa fortune dans trois investissements indépendants dans les proportions 25%, 43% et 32% respectivement. Pour les investissements les rendements annuels aléatoires R_1, R_2 et R_3 sont de moyennes 10%, 15% et 13% et d'écart-types 8%, 12% et 10%. Trouver l'écart-type du rendement annuel sur la fortune de Richy Rich.

A) 12.7% B) 13.1% C) 11.8% D) 6.4% E) 3.7%

$\boxed{53}$ Le temps pris par le réparateur pour réparer une machine est une variable aléatoire de loi exponentielle de moyenne 1 heure. Si le réparateur prend moins de 15 minutes pour réparer la machine, il reçoit une prime de 20$; s'il prend entre 15 et 30 minutes, il reçoit une prime de 10$. Trouver la prime moyenne reçue par le réparateur.

A) 3.40 B) 4.30 C) 5.50 D) 6.15 E) 7.30

$\boxed{54}$ Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et uniformes sur l'intervalle $[0,1]$. Trouver $E[\max\limits_{1\le i\le n} X_i] - E[\min\limits_{1\le i\le n} X_i]$.

A) $\dfrac{n-1}{n+1}$ B) $\dfrac{1}{n+1}$ C) $1-\dfrac{1}{n}$ D) $\dfrac{1}{2}$ E) $\dfrac{n}{n+1}$

$\boxed{55}$ Trouver le 87.5$^{\text{e}}$ percentile de la variable aléatoire X de fonction de densité :

$$f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}\ ,\ -\infty < x < \infty.$$

A) $\ln 4$ B) $e^{-\frac{7}{8}}$ C) e^{-1} D) $e^{\frac{1}{8}}$ E) $3\ln 2$

$\boxed{56}$ Soit X le nombre de six lorsque 72 dés bien équilibrés sont lancés.
Trouver l'espérance de X^2.

A) 72 B) 154 C) 10 D) 6 E) 354

$\boxed{57}$ La perte X pour une police d'assurance médicale admet la fonction de répartition (ou fonction cumulative) :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{1}{9}\left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 3 \\ 1 & \text{si} \quad x > 3. \end{cases}$$

Calculer le mode de X.

A) $\frac{2}{3}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) 3

$\boxed{58}$ Soit X une variable aléatoire telle que $E[X] = 2$ et $E[X(X-4)] = 5$. Trouver l'écart-type de $Y = -4X + 12$.

A) $\sqrt{24}$ B) 12 C) 4 D) 24 E) 144

$\boxed{59}$ La perte est uniformément distribuée sur l'intervalle $[0, 1\,000]$. De plus, l'assurance comprend un déductible de 200. Trouver la médiane du remboursement.

A) 200 B) 500 C) 100 D) 400 E) 300

$\boxed{60}$ La perte suit la loi uniforme discrète sur les entiers $0, 1, 2, \ldots, 9, 10, 11$. Si une police d'assurance rembourse cette perte avec un déductible de 5.5, trouver l'espérance du montant non-remboursé par la police.

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

$\boxed{61}$ Il y a 80 étudiants dans un cours de probabilité. Trouver l'espérance du nombre de jours de l'année (on exclut le 29 février) qui sont le jour de fête d'un seul étudiant de la classe.

A) 45.6 B) 37.5 C) 33.24 D) 64.41 E) 80

$\boxed{62}$ Un assureur détient 1 000 polices indépendantes d'assurance vie de 1 000\$ chacune. Pour les 500 polices du groupe A, la probabilité de décès durant la période assurée est de 0.01, alors qu'elle est de 0.02 pour les 500 polices du groupe B. Trouver le coefficient de variation (c'est-à-dire $\sigma_S/E[S]$) du montant total S des réclamations des 1 000 polices.

A) 0.2778 B) 0.2703 C) 0.2632 D) 0.2560 E) 0.2503

$\boxed{63}$ Une urne contient 10 boules rouges et 12 boules bleues. On tire 18 boules, une à une et sans remise. Sachant que les 12 boules bleues ont été pigées, trouver l'espérance du nombre de boules rouges parmi les 9 premières boules pigées.

A) 5 B) 6 C) 7 D) 4 E) 3

$\boxed{64}$ Une urne contient 100 billets pour un tirage d'un prix de présence. Il y a un prix de 50\$, trois prix de 25\$, six prix de 10\$, quinze prix de 3\$ et 75 billets ne donnant rien. Le maître de cérémonie pige au hasard deux billets qu'il vous donne. Soit X le plus petit montant gagné par ces billets (il peut y avoir égalité). Trouver $E[X]$.

A) 0.1336 B) 0.2636 C) 1.336 D) 2.636 E) 5

$\boxed{65}$ Pour une police d'assurance, la perte X a la distribution discrète suivante :

$$X = \begin{cases} 2 & \text{avec probabilité } 0.4 \\ 20 & \text{avec probabilité } 0.6 \end{cases}$$

Votre travail, comme actuaire, est de déterminer le déductible d à imposer pour que l'espérance du remboursement soit 6. Que vaut d ?

A) 1 B) 5 C) 7 D) 10 E) 15

$\boxed{66}$ Soit X une variable aléatoire continue de médiane 0.4.
Trouver la moyenne entre les médianes des deux variables aléatoires $Y = e^X$ et $Z = 3X$.

A) 2.7183 B) 1.600 C) 1.346 D) 0.400 E) 2.692

$\boxed{67}$ Un assureur détient 1 000 polices d'assurance vie de 100$ chacune. Pour les 300 polices du groupe A, la probabilité de décès durant la période assurée est de 0.01, alors qu'elle est de 0.02 pour les 700 polices du groupe B. Trouver le *coefficient de variation* (c'est-à-dire $\sigma_S/E[S]$) du montant total S des réclamations des 1 000 polices.

A) 0.33 B) 0.30 C) 0.27 D) 0.24 E) 0.21

$\boxed{68}$ La perte de chacun des n assurés d'un portfolio est modélisée par la variable aléatoire continue X telle que $f_X(x) = \frac{1}{1\,000}e^{-x/1\,000}$, $x > 0$. Avec un déductible de 500, l'assureur s'attend à 10 000 réclamations (dépassant le déductible). Si le déductible est maintenu à 500 alors que toutes les pertes sont doublées, trouver le nouveau nombre espéré de réclamations (dépassant le déductible).

A) moins de 10 000 B) entre 10 000 et 12 000 C) entre 12 000 et 14 000 D) entre 14 000 et 16 000 E) plus de 16 000

$\boxed{69}$ Soit X une variable aléatoire. Si le second moment de X centré à 4 (respectivement centré à 7) est 30 (respectivement 20), que vaut l'espérance de X ?

A) 7.17 B) 10 C) 5 D) 1.17 E) 0

$\boxed{70}$ Le *coefficient de variation* d'une variable aléatoire Z est défini par $\sigma_Z/E[Z]$. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de même moyenne non-nulle et ayant respectivement les coefficients de variation 3 et 4, trouver le coefficient de variation de $\frac{1}{2}(X+Y)$.

A) 12 B) 5 C) 4 D) $\frac{7}{2}$ E) $\frac{5}{2}$

$\boxed{71}$ Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $\mathrm{Var}[X^2] = 1$, $E[X^2] = 2$, $\mathrm{Var}[Y] = 2$ et $E[Y] = 0$. Trouver la variance de $X^2 \cdot Y$.

A) 6 B) 4 C) 9 D) 10 E) 2

$\boxed{72}$ Soit X une variable aléatoire continue dont la fonction de densité est :

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{(2.5) \cdot 200^{2.5}}{x^{3.5}} & \text{pour } x > 200 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver la différence entre le 25^e^ et le 75^e^ percentiles de X.

A) 288 B) 224 C) 167 D) 148 E) 124

$\boxed{73}$ Un assureur offre deux polices pour couvrir la perte X dont la fonction de densité est :

$$f_X(x) = \begin{cases} x/50 & \text{pour } 0 < x < 10 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour la police I, il n'y a pas de déductible mais un maximum de 4. Pour la police II, il y a un déductible de 4 mais pas de maximum. Calculer $E[R_1] - E[R_2]$ où R_1 et R_2 sont les remboursements aléatoires pour les deux polices.

A) 0.25 B) 0.32 C) 0.64 D) 0.79 E) 0.91

$\boxed{74}$ Un couple contracte une police d'assurance médicale qui les rembourse pour les journées de travail perdues pour cause de maladie. La police paie une prestation mensuelle de 100 fois le maximum entre le nombre X de jours perdus par la femme et le nombre Y de jours perdus par l'homme durant le mois, sujet à un maximum de 300. En supposant que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes et uniformes discrètes sur l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, trouver la prestation mensuelle moyenne qui sera payée au couple.

A) 150 B) 200 C) 230.30 D) 261.11 E) 300

$\boxed{75}$ La médiane de la différence absolue (notée mda) d'une variable aléatoire X, est définie par :

$\text{mda}(X) = \text{méd}(|X - \text{méd}(X)|)$ où $\text{méd}(X)$ dénote la médiane de X.

Soit X une variable aléatoire discrète de fonction de probablilité :

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{7} & \text{pour } x = 1, 3, 6, 13, 20 \\ \dfrac{2}{7} & \text{pour } x = 7 \end{cases}$$

Trouver $\text{mda}(X)$.

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

$\boxed{76}$ Les variables discrètes X et Y sont telles que $f_{X,Y}(x, y) = (x + 2y)/70$ pour $x = 1, 2, 3, 4$ et $y = 1, 2, \ldots, x$ et $f_{X,Y}(x, y) = 0$ autrement. Trouver l'espérance de X.

A) $\dfrac{20}{7}$ B) $\dfrac{23}{7}$ C) $\dfrac{26}{7}$ D) $\dfrac{29}{7}$ E) $\dfrac{32}{7}$

$\boxed{77}$ Une compagnie d'assurance rembourse le montant X des soins dentaires jusqu'à un maximum de 250$. La fonction de densité est :

$$f_X(x) = \begin{cases} ke^{-0.005x} & \text{pour } x \geq 0 \\ 0 & \text{pour } x < 0 \end{cases}$$

Trouver la médiane du remboursement.

A) 128 B) 131 C) 139 D) 147 E) 200

$\boxed{78}$ Les dépenses dentaires annuelles d'un fonctionnaire suivent une répartition uniforme sur l'intervalle de 0 à 1 000. Le régime de soins dentaires de base du gouvernement rembourse à l'employé jusqu'à un maximum de 300 les dépenses dentaires qui surviennent dans l'année tandis que le régime supplémentaire débourse jusqu'à un maximum de 500 pour toutes les dépenses dentaires additionnelles. Y représente les prestations annuelles payées par le régime supplémentaire à un fonctionnaire. Calculer $E[Y]$.

A) 225 B) 250 C) 275 D) 300 E) 325

$\boxed{79}$ La compagnie EXXON assure ses 5 pétroliers géants. Pour chaque pétrolier il y a une probabilité 0.05 de réclamation, indépendamment des autres pétroliers. Le montant $X > 0$ d'une réclamation pour un pétrolier est une variable aléatoire continue de moyenne 50 et variance 25 (en millions de dollars). Trouver la variance de la réclamation totale pour les 5 pétroliers.

A) 600 B) 150 C) 62.5 D) 18.125 E) 6.25

$\boxed{80}$ Soit X une variable aléatoire continue de fonction de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} 8xe^{-4x^2} & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver la médiane de X.

A) 0.347 B) 1 C) 0.693 D) 0.416 E) 0.833

$\boxed{81}$ Soit X une variable aléatoire continue de fonction de densité $f_X(x) = \dfrac{|x|}{4}$ pour $-2 \leq x \leq 2$. Trouver σ_X, l'écart-type de X.

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\dfrac{1}{2}$ D) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ E) 2

$\boxed{82}$ Soit$X$ une variable aléatoire continue de fonction de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{30}x(1+3x) & \text{pour } 1 < x < 3 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver $E[\frac{1}{X}]$.

A) $\dfrac{1}{12}$ B) $\dfrac{7}{15}$ C) $\dfrac{45}{103}$ D) $\dfrac{11}{20}$ E) $\dfrac{14}{15}$

$\boxed{83}$ Soit$X$ une variable aléatoire continue de loi uniforme sur l'intervalle $[1,\, a]$ où $a > 1$.

Si $E[X] = 6\text{Var}[X]$ alors que vaut a ?

A) 2 B) 3 C) $3\sqrt{2}$ D) 7 E) 8

$\boxed{84}$ Soit$X$ une variable aléatoire continue (telle que $X > 0$) de fonction de densité $f_X(x)$ et fonction de distribution $F_X(x)$. Laquelle des expressions suivantes donne $E[X]$?

A) $\int_0^\infty F_X(x)dx$ B) $\int_0^\infty (1 - f_X(x))dx$ C) $\int_0^\infty xF_X(x)dx$

D) $\int_0^\infty (1 - F_X(x))dx$ E) $\int_0^\infty f_X(x)dx$

$\boxed{85}$ Soit X une variable aléatoire quelconque de moyenne μ et écart-type σ. Le (9)
célèbre théorème de Tchebycheff dit que la probabilité $P(|X - \mu| \leq 3\sigma)$ est :

A) $\leq \frac{1}{9}$ B) $\leq \frac{1}{3}$ C) $\geq \frac{1}{9}$ D) $\geq \frac{8}{9}$ E) $\geq \frac{2}{3}$

$\boxed{86}$ Soit X la variable aléatoire continue de fonction de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} (0.8)e^{-2x} + (1.8)e^{-3x} & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver $E[X]$.

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{3}{5}$ C) 1 D) $\frac{6}{5}$ E) $\frac{3}{2}$

$\boxed{87}$ Le nombre de réclamations par année pour une compagnie d'assurance suit une loi de Poisson N, avec $P(N = k) = p_k$, de moyenne 1. L'actuaire décide de modifier la distribution : il pose $p_0^* = 0.75$ (la nouvelle probabilité de zéro réclamation) et $p_k^* = c \cdot p_k$, si $k \geq 1$, pour une constante c. Trouver la nouvelle espérance du nombre de réclamations.

A) 0.395 B) 0.515 C) 0.621 D) 0.730 E) 0.848

$\boxed{88}$ Une compagnie, pour produire son électricité, dispose de 3 génératrices A, B, C, dont les durées de vie respectives suivent des lois exponentielles de moyenne 15, 20 et 30 respectivement. La compagnie utilise la génératrice A puis la B (lorsque la A tombe en panne) puis la C (lorsque la B tombe en panne). Soit X la durée de production d'électricité dont dispose la compagnie. Trouver le coefficient de variation de X, c'est-à-dire $\sigma_X/E[X]$.

A) 0.45 B) 0.52 C) 0.60 D) 0.65 E) 0.75

$\boxed{89}$ Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $E[X] = 3 = \sigma_X$ et $E[Y] = -\sigma_Y = -3$. Trouver $E[3X^2 - 2Y^2]$.

A) 18 B) 36 C) 54 D) 72 E) 90

$\boxed{90}$ Un assureur détient 1 000 polices indépendantes d'assurance vie de 1 000\$ chacune. Pour les 400 polices du groupe A, la probabilité de décès durant la période assurée est de 0.01, alors qu'elle est de 0.02 pour les 600 polices du groupe B. Trouver le coefficient de variation (c'est-à-dire $\sigma_S/E[S]$) du montant total S des réclamations des 1 000 polices.

A) 0.50 B) 0.45 C) 0.40 D) 0.30 E) 0.25

$\boxed{91}$ Le coefficient de variation d'une variable aléatoire Z est défini par $\sigma_Z/E[Z]$. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de même moyenne non-nulle et ayant respectivement les coefficients de variation 12 et 5, trouver le coefficient de variation de $X + Y$.

A) 17 B) 13 C) 9 D) $\frac{17}{2}$ E) $\frac{13}{2}$

$\boxed{92}$ Une compagnie utilise un générateur électrique pour sa production, et un second si le premier tombe en panne. Les deux ont une durée de vie donnée par une loi exponentielle de moyenne 5. Trouver l'écart-type de la durée X des opérations.

A) 10 B) $\frac{2}{5}$ C) $5\sqrt{2}$ D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$