Actuariat I
ACT2121

huitième séance

Arthur Charpentier

charpentier.arthur@uqam.ca

http ://freakonometrics.blog.free.fr/

UQÀM
Université du Québec à Montréal

Automne 2012

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire continue de fonction de densité $f_X(x) = e^{-x}$ pour $x \geq 0$ et $f_X(x) = 0$ pour $x < 0$. Si $Y = X^2 - 1$ alors que vaut $F_Y(3)$?

A) $\dfrac{1}{3}\, e^{-3}$ B) $\dfrac{1}{4}\, e^{-2}$ C) $1 - 2\, e^{-2}$ D) $1 - e^{-2}$ E) $1 - e^{-3}$

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire continue de fonction de densité $f_X(x) = \dfrac{|x|}{4}$ pour $-2 \leq x \leq 2$. Trouver σ_X, l'écart-type de X.

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\dfrac{1}{2}$ D) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ E) 2

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire continue de fonction de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{30}x(1+3x) & \text{pour } 1 < x < 3 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver $\mathbb{E}[\frac{1}{X}]$.

A) $\dfrac{1}{12}$ B) $\dfrac{7}{15}$ C) $\dfrac{45}{103}$ D) $\dfrac{11}{20}$ E) $\dfrac{14}{15}$

Exercice 4

Une compagnie perçoit une prime annuelle égale à la somme d'un frais fixe par police et d'une charge additionnelle proportionnelle au montant assuré. La prime annuelle pour police assurant 100 000 (respectivement 200 000) est 500 (respectivement 700).
Trouver la prime annuelle pour une police assurant 350 000.

A) 1 300 B) 1 200 C) 1 100 D) 1 000 E) 900

Exercice 5

Soit X une variable aléatoire dont la série génératrice des moments est :

$$M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{nt-1}}{n!}$$

Trouver $\mathbb{P}(X = 2)$.

A) e^{-2} B) $\frac{1}{3}$ C) e^{-1} D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{2}e^{-1}$

Exercice 6

Soit X une variable aléatoire continue de loi uniforme sur l'intervalle $[1, a]$ où $a > 1$.
Si $\mathbb{E}[X] = 6\text{Var}[X]$ alors que vaut a ?

A) 2 B) 3 C) $3\sqrt{2}$ D) 7 E) 8

Exercice 7

La perte X est une variable aléatoire continue dont la fonction de densité est :

$$f_X(x) = \begin{cases} (0.002)e^{-(0.002)x} & \text{pour } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si, à cause de l'inflation, la perte a subi une augmentation de 25% pour devenir Y, trouver la fonction de densité de Y.

A) $(0.0025)e^{-(0.0025)y}$ B) $(0.0016)e^{-(0.0016)y}$ C) $(0.02)e^{-(0.02)y}$

D) $(0.004)e^{-(0.004)y}$ E) $(1.25)e^{-(1.25y)}$

Exercice 8

Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle. Si $\mathbb{P}(X > 1) = \dfrac{4}{5}$, trouver la fonction de répartition, $F_X(x)$, de X.

A) $\left(\dfrac{4}{5}\right)^x$ B) $\dfrac{4}{5}\, e^{-\frac{4x}{5}}$ C) $1 - e^{\frac{4x}{5}}$ D) $e^{-\frac{4x}{5}}$ E) $1 - \left(\dfrac{4}{5}\right)^x$

Exercice 9

Soit X une variable aléatoire telle que $M_X(t) = \dfrac{1}{1-2t}$. Trouver $\mathbb{P}(X > 2)$.

A) $\dfrac{1}{2}$ B) e^{-1} C) $1 - e^{-1}$ D) $1 - e^{-2}$ E) e^{-2}

Exercice 10

Soit X et Y deux variables aléatoires dépendantes dont le coefficient de corrélation $\rho_{X,Y}$ vaut 0.8. Une étude révèle que $\text{Var}[X] = 25$ et $\text{Var}[Y] = 9$. Calculer Var[2X + 3Y].

A) 253 B) 295 C) 325 D) 395 E) 453

Exercice 11

Soit X une variable aléatoire continue (telle que $X > 0$) de fonction de densité $f_X(x)$ et fonction de distribution $F_X(x)$. Laquelle des expressions suivantes donne $\mathbb{E}[X]$?

A) $\displaystyle\int_0^\infty F_X(x)dx$ B) $\displaystyle\int_0^\infty (1 - f_X(x))dx$ C) $\displaystyle\int_0^\infty xF_X(x)dx$

D) $\displaystyle\int_0^\infty (1 - F_X(x))dx$ E) $\displaystyle\int_0^\infty f_X(x)dx$

Exercice 12

Soit X une variable aléatoire quelconque de moyenne μ et écart-type σ. Le célèbre théorème de Tchebycheff dit que la probabilité $P(|X-\mu| \leq 3\sigma)$ est :

A) $\leq \frac{1}{9}$ B) $\leq \frac{1}{3}$ C) $\geq \frac{1}{9}$ D) $\geq \frac{8}{9}$ E) $\geq \frac{2}{3}$

Exercice 13

Si le temps aléatoire que prend un étudiant du cours ACT4020 pour compléter un devoir suit une loi exponentielle de moyenne 5 heures, trouver la probabilité que dans une classe de 40 élèves au moins un élève qui complèterait le devoir en plus de 15 heures.

A) 13% B) 25% C) 48% D) 75% E) 87%

Exercice 14

Soit X la variable aléatoire continue de fonction de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} (0.8)e^{-2x} + (1.8)e^{-3x} & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver $\mathbb{E}[X]$.

A) $\dfrac{2}{5}$ B) $\dfrac{3}{5}$ C) 1 D) $\dfrac{6}{5}$ E) $\dfrac{3}{2}$

Exercice 15

Le nombre de réclamations par année pour une compagnie d'assurance suit une loi de Poisson N, avec $\mathbb{P}(N=k)=p_k$, de moyenne 1. L'actuaire décide de modifier la distribution : il pose $p_0^*=0.75$ (la nouvelle probabilité de zéro réclamation) et $p_k^*=c\cdot p_k$, si $k\geq 1$, pour une constante c. Trouver la nouvelle espérance du nombre de réclamations.

A) 0.395 B) 0.515 C) 0.621 D) 0.730 E) 0.848

Exercice 16

Une compagnie, pour produire son électricité, dispose de 3 génératrices A, B, C, dont les durées de vie respectives suivent des lois exponentielles de moyenne 15, 20 et 30 respectivement. La compagnie utilise la génératrice A puis la B (lorsque la A tombe en panne) puis la C (lorsque la B tombe en panne). Soit X la durée de production d'électricité dont dispose la compagnie. Trouver le coefficient de variation de X, c'est-à-dire $\sigma_X/\mathbb{E}[X]$.

A) 0.45 B) 0.52 C) 0.60 D) 0.65 E) 0.75

Exercice 17

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbb{E}[X] = 3 = \sigma_X$ et $\mathbb{E}[Y] = -\sigma_Y = -3$. Trouver $\mathbb{E}[3X^2 - 2Y^2]$.

A) 18 B) 36 C) 54 D) 72 E) 90

Exercice 18

Un assureur détient 1 000 polices indépendantes d'assurance vie de 1 000$ chacune. Pour les 400 polices du groupe A, la probabilité de décès durant la période assurée est de 0.01, alors qu'elle est de 0.02 pour les 600 polices du groupe B. Trouver le coefficient de variation (c'est-à-dire $\sigma_S/\mathbb{E}[S]$) du montant total S des réclamations des 1 000 polices.

A) 0.50 B) 0.45 C) 0.40 D) 0.30 E) 0.25

Exercice 19

Soit X une variable aléatoire telle que :

$$M_X(t) = \frac{1}{5}\left(e^{-2t} + e^{-t} + 1 + e^{t} + e^{2t}\right).$$

Trouver $\mathbb{P}(X \geq 0 \mid X \neq 1 \text{ ou} - 1)$.

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{2}{3}$

Exercice 20

Soit X une variable aléatoire continue dont la fonction de répartition (ou cumulative) est :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 - e^{-x^2/2} & \text{si} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Trouver le 75$^{\text{e}}$ percentile de X.

A) 1.665 B) 0.833 C) 1.386 D) 0.693 E) 0.346

Exercice 21

Le coefficient de variation d'une variable aléatoire Z est défini par $\sigma_Z/\mathbb{E}[Z]$. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de même moyenne non-nulle et ayant respectivement les coefficients de variation 12 et 5, trouver le coefficient de variation de $X+Y$.

A) 17 B) 13 C) 9 D) $\dfrac{17}{2}$ E) $\dfrac{13}{2}$

Exercice 22

Une compagnie d'assurance automobile vend 45% de ses polices à des femmes et 55% à des hommes. Le temps écoulé entre le moment de l'achat et le moment de la première réclamation suit une loi exponentielle de moyenne 4 ans pour les femmes et 3 ans pour les hommes. Étant donné qu'un assuré n'a pas fait de réclamation durant la première année, trouver la probabilité que ce soit une femme.

A) 0.44 B) 0.45 C) 0.46 D) 0.47 E) 0.48

Exercice 23

Un assureur offre deux polices pour couvrir la perte X dont la fonction de densité est :

$$f_X(x) = \begin{cases} x/18 & \text{pour } 0 < x < 6 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour la police I, il n'y a pas de déductible mais un maximum de 4. Pour la police II, il y a un déductible de 2 mais pas de maximum. Calculer $\dfrac{\mathbb{E}[R_1]}{\mathbb{E}[R_2]}$ où R_1 et R_2 sont les remboursements aléatoires pour les deux polices.

A) $\dfrac{19}{14}$ B) $\dfrac{3}{2}$ C) $\dfrac{23}{14}$ D) $\dfrac{25}{14}$ E) $\dfrac{27}{14}$

Exercice 24

Un couple contracte une police d'assurance médicale qui les rembourse pour les journées de travail perdues pour cause de maladie. La police paie une prestation mensuelle de 100 pour chaque jour de travail perdu par la femme ou par l'homme durant le mois, sujet à un maximum de 500. En supposant que X, le nombre de jours perdus par la femme et Y, le nombre de jours perdus par l'homme, sont des variables aléatoires indépendantes et uniformes discrètes sur l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, trouver la prestation mensuelle moyenne qui sera payée au couple.

A) 194.44 B) 300 C) 402.78 D) 411.11 E) 600

Exercice 25

Une compagnie utilise un générateur électrique pour sa production, et un second si le premier tombe en panne. Les deux ont une durée de vie donnée par une loi exponentielle de moyenne 5. Trouver l'écart-type de la durée X des opérations.

A) 10 B) $\dfrac{2}{5}$ C) $5\sqrt{2}$ D) $\dfrac{5}{2}$ E) $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

Exercice 26

Soit X et Y deux variables aléatoires continues de fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}(x+2y) & \text{pour } 0<x<1 \text{ et } 0<y<1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver la variance conditionnelle de X sachant $Y=1/2$.

A) $\dfrac{13}{14}$ B) $\dfrac{13}{162}$ C) $\dfrac{13}{81}$ D) $\dfrac{17}{18}$ E) $\dfrac{3}{4}$

Exercice 27

Soit X et Y deux variables aléatoires continues de fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} (0.32)\ e^{-(0.8)x\ \ -(0.4)y} & \text{pour } 0 \leq x \text{ et } 0 \leq y \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver $\mathbb{E}[Y - X]$.

A) -0.4 B) -1.25 C) 1.25 D) 0.32 E) 0.4

Exercice 28

La perte X suit une loi uniforme sur l'intervalle [0, 1 500].
Le remboursement R est sujet à un maximum m. Si $\mathbb{E}[R] = 630$ alors que vaut m ?

A) 500 B) 600 C) 800 D) 900 E) 1 200

Exercice 29

Soit X et Y deux pertes qui sont des variables aléatoires continues de fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}6xy+3x^2 & \text{pour } 0<x<y<1\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Trouver la probabilité que la perte Y soit moindre que 0.5.

A) 0.015625 B) 0.03125 C) 0.0625 D) 0.125 E) 0.25

Exercice 30

La perte X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 20]$. Le remboursement est sujet à un déductible de 1 et à un maximum (ou plafond) de 15.
Trouver la variance du remboursement.

A) 26.86 B) 25.32 C) 23.37 D) 22.32 E) 20.04

Exercice 31

Soit X et Y deux v.a. discrètes dont la distribution conjointe est donnée par le tableau :

		X		
		0	1	2
Y	0	0.3	0.2	0.1
	1	0.2	0.1	0.1

Trouver le coefficient de corrélation $\rho_{X,Y}$.

A) 0.02 B) 0.052 C) 0.092 D) 0.151 E) 0.252

Exercice 32

Soit X et Y deux variables aléatoires continues de fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{24}{7}\, x(1+y) & \text{pour } 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $h(x,y) = f_{X|Y=y}(x|y)$ alors que vaut $h(0.25,\, 0.5)$

A) 1 B) 0.5 C) 4 D) 3 E) 2

Exercice 33

Dans un grand groupe de personnes on suppose que la grandeur des hommes (respectivement des femmes) suit une loi normale de moyenne 175 cm (respectivement 168 cm) et d'écart-type 8 cm (respectivement 6 cm). On choisit au hasard 5 hommes et 5 femmes pour la danse d'ouverture d'un bal. Trouver la probabilité que dans les cinq couples les femmes soient toujours plus grandes que leur partenaire.

A) 0.00083 B) 0.0083 C) 0.083 D) 0.048 E) 0.242

Exercice 34

La probabilité qu'un téléviseur de la compagnie Itadonne, vendu dans une succursale prise au hasard, soit défectueux est une variable aléatoire, P, uniforme sur l'intervalle $[0, \frac{1}{4}]$. (i.e chaque succursale a une même valeur de P, prise au hasard). Un inspecteur de qualité prend au hasard 10 téléviseurs, dans une même succursale. Soit Y le nombre de téléviseurs défectueux. Trouver σ_Y, l'écart type de Y.

A) 1.83 B) 1.51 C) 1.25 D) 1.02 E) 0.72

Exercice 35

Une compagnie d'assurance a présentement 600 clients. Elle prévoie une baisse de 20% par année pour l'avenir. Si $P = 100\$$ est la prime annuelle de chaque client, trouver le total « ad infinitum » de toutes les primes de tous les clients présents et futurs.

A) 600 000 B) 500 000 C) 450 000 D) 400 000 E) 300 000

Exercice 36

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes dont la distribution conjointe est :

$$p(x,y) = \mathbb{P}(X=x, Y=y) = \frac{1}{7} - \frac{x}{35} \text{ pour } 0 \leq y \leq x \leq 4$$

où x et y ne prennent que des valeurs entières. Trouver $\mathbb{P}(0 \leq X \leq 3 \mid Y=1)$.

A) 0.5 B) 0.6 C) 0.7 D) 0.8 E) 0.9

Exercice 37

Soit X et Y deux variables aléatoires continues de fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{pour} \quad 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer $\mathbb{P}(X > 0.25, Y \leq 0.5)$

A) $\dfrac{11}{16}$ B) $\dfrac{23}{32}$ C) $\dfrac{21}{32}$ D) $\dfrac{2}{3}$ E) $\dfrac{25}{32}$

Exercice 38

Soit X et Y des variables aléatoires continues ayant la fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 15y & \text{pour } 0 \leq x^2 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer la fonction de densité de la variable conditionnée $X|Y = \frac{1}{2}$ pour les valeurs possibles de x.

A) $5(1-\sqrt{x})$ B) $15(x-\sqrt{x})$ C) 1 D) $2x$ E) $\frac{2}{\sqrt{2}-1}$

Exercice 39

Cette année la perte est uniforme entre 0 et 1 000, et la compagnie applique un déductible de 100\$. Si l'année prochaine la perte sera uniforme entre 0 et 1 200 et la compagnie maintient le déductible à 100\$ de quel pourcentage le remboursement espéré va-t-il augmenter ?

A) 12.5%   B) 16.5%   C) 20.5%   D) 24.5%   E) 28.5%

Exercice 40

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes ne prenant que les valeurs -1 et $+1$. Si
$\mathbb{P}(X=-1,Y=-1)=0.8, \mathbb{P}(X=-1,Y=1)=0.05, \mathbb{P}(X=1,Y=-1)=0.025$ et $\mathbb{P}(X=1,Y=1)=0.125$, calculer $\text{Var}[X|Y=-1]$.

A) 0.1175 B) 0.2050 C) 0.2200 D) 0.4650 E) 0.5445

Exercice 41

Pour une assurance, la perte X (en milliers de dollars) suit une loi de fonction de densité $f_X(x) = \frac{3x^2}{8}$ pour $0 \leq x \leq 2$. Si le temps (en heures) pour traiter la réclamation pour une perte $0 \leq x \leq 2$ est uniformément distribué entre x et $2x$, calculer la probabilité que ça prenne plus de 3 heures pour traiter une réclamation aléatoire.

A) $\dfrac{29}{64}$ B) $\dfrac{23}{64}$ C) $\dfrac{17}{64}$ D) $\dfrac{11}{64}$ E) $\dfrac{5}{64}$

Exercice 42

Soit X et Y des variables aléatoires continues de loi de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{4}x & \text{pour } 0 < x < 2 \text{ et } 0 < y < 2-x \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver $\mathbb{P}(X < 1)$.

A) $\dfrac{7}{8}$ B) $\dfrac{3}{4}$ C) $\dfrac{5}{8}$ D) $\dfrac{1}{2}$ E) $\dfrac{1}{4}$

Exercice 43

Supposons que les notes sur 100 dans le cours ACT2025 suivent une loi normale de moyenne 69 et variance 49. Si la classe comprend 80 étudiants, trouver la probabilité que personne n'obtienne plus de 90%.

A) 10%   B) 50%   C) 90%   D) 80%   E) 40%

Exercice 44

Les variables aléatoires X_1, X_2, X_3 sont uniformes sur l'intervalle $[0, 1]$ avec $\text{Cov}(X_i, X_j) = \frac{1}{24}$ pour $i = 1, 2, 3$ et $i \neq j$. Calculer $\text{Var}[X_1 + 2X_2 + 3X_3]$.

A) $\dfrac{1}{2}$ B) $\dfrac{2}{3}$ C) $\dfrac{25}{12}$ D) $\dfrac{17}{24}$ E) $\dfrac{7}{6}$

Exercice 45

Une compagnie d'assurance modélise le montant de la perte lors d'un accident par la variable aléatoire continue X uniforme sur l'intervalle $[0, 5\ 000]$. Il y a un déductible de 1000. Trouver l'espérance du remboursement si un maximum de 3 000 est imposé sur le remboursement.

A) 1 200 B) 1 300 C) 1 500 D) 1 700 E) 2 000

Exercice 46

La prime pour une assurance dentaire individuelle est fixée à 220$. Sachant que 100 polices ont été vendues et que X, la réclamation aléatoire annuelle, suit une loi exponentielle de moyenne 200, évaluer approximativement la probabilité que la compagnie d'assurance perde de l'argent.

A) 0.333 B) 0.159 C) 0.001 D) 0.460 E) 0.407

Exercice 47

Pierre, le gambler, décide de jouer 100 parties consécutives de 50$ la partie, au casino de Montréal. Il estime qu'à chaque partie, il a une probabilité de 0.47 de gagner (le 50$), de 0.48 de perdre (le 50$) et de 0.05 de faire une partie nulle (aucun gain et aucune perte). Trouver (approximativement) la probabilité que Pierre gagne plus de 175$ au total dans ses 100 parties.

A) 0.12 B) 0.22 C) 0.32 D) 0.42 E) 0.52

Exercice 48

Une compagnie d'assurance a trois grands groupes, A, B, C, d'assurés. Les taux de réclamations (c'est-à-dire le pourcentage des gens qui font une réclamation) pour les trois groupes sont respectivement X, Y, Z, trois variables aléatoires continues de fonction de densité simultanée :

$$f_{X,Y,Z}(x,y,z) = \frac{1}{3}(x+2y+3z) \quad \text{pour} \quad 0<x<1, \quad 0<y<1, \quad 0<z<1.$$

Trouver la probabilité que pour chacun des trois groupes, moins de 50% font des réclamations.

A) $\dfrac{1}{16}$ B) $\dfrac{1}{12}$ C) $\dfrac{1}{8}$ D) $\dfrac{1}{6}$ E) $\dfrac{1}{4}$

Exercice 49

Le temps X pour développer une photo est une variable aléatoire de loi normale avec moyenne 90 secondes et écart-type 4.8 secondes.
Trouver la probabilité que le temps pour développer la photo soit entre 86 et 94 secondes.

A) 0.625 B) 0.615 C) 0.605 D) 0.595 E) 0.585

Exercice 50

Un organisme de charité reçoit 10 000 cotisations. Les cotisations sont supposées indépendantes et de même loi avec moyenne 125 et écart-type de 25. Calculer le 90$^{\text{e}}$ percentile approximatif du total des 10 000 cotisations reçues (en millions de dollars).

A) 1.253 B) 1.265 C) 1.282 D) 1.295 E) 1.301