ACTUARIAT 1, ACT 2121, AUTOMNE 2013 #12

ARTHUR CHARPENTIER

$\boxed{1}$ Une compagnie d'assurance modélise le montant de la perte lors d'un accident par la variable aléatoire continue X uniforme sur l'intervalle $[0, 3\,000]$. Trouver l'espérance du remboursement si un maximum de $2\,000$ est imposé.

A) $1\,500$ B) $1\,000$ C) $2\,500$ D) $2\,000$ E) $1\,333.33$

$\boxed{2}$ Une petite compagnie d'assurance a 32 polices (indépendantes les unes des autres). Pour chaque police la probabilité de réclamation est $1/6$, et s'il y a réclamation, la grandeur X de la réclamation a une fonction de densité

$$f_X(x) = \begin{cases} 2(1-x) & \text{pour } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer l'espérance du montant total des réclamations des 32 polices.

A) $\dfrac{32}{3}$ B) $\dfrac{16}{3}$ C) $\dfrac{32}{9}$ D) $\dfrac{8}{3}$ E) $\dfrac{16}{9}$

$\boxed{3}$ Une machine est assurée contre les pannes. Le temps T jusqu'à la première panne de cette machine suit une loi exponentielle de moyenne 10. Si elle tombe en panne au temps t, pour $0 \leq t \leq 7$, le remboursement sera $\nu(t) = e^{7-0.2t}$, et pour $t > 7$, le remboursement sera zéro. Trouver l'espérance du remboursement.

A) 98.70 B) 109.66 C) 270.43 D) 320.78 E) 352.16

$\boxed{4}$ Une compagnie maritime possède trois pétroliers géants. Elle décide de les assurer contre les naufrages pour une période de 5 ans. L'assureur estime que la probabilité que $k = 0, 1, 2, 3$ des pétroliers coulent d'ici 5 ans est $0.8, 0.1, 0.05$ et 0.05, respectivement. Le remboursement sera, suivant le cas, de k^2 millions de dollars. Trouver l'espérance du remboursement.

A) 1 500 000 B) 1 250 000 C) 1 000 000 D) 750 000 E) 500 000

$\boxed{5}$ Une compagnie d'assurance modélise le montant en milliers de dollars de la perte lors d'un accident par la variable aléatoire continue X de fonction de densité $f_X(x) = xe^{-x}$ pour $x \geq 0$. Trouver l'espérance du remboursement si un maximum de 2 000 est imposé.

A) 1 659.84\$ B) 1 458.66\$ C) 1 273.32\$ D) 1 084.36\$ E) 990.34\$

$\boxed{6}$ Une assurance couvre une perte X qui est uniforme entre 0 et 5 000. Trouver le déductible d que l'on doit imposer pour que la valeur espérée du remboursement diminue de 10%.

A) 220.20\$ B) 266.44\$ C) 256.58\$ D) 258.56\$ E) 244.66\$

$\boxed{7}$ La perte X d'un assuré est uniformément distribuée entre 0 et 1 000. Trouver la valeur d du déductible à imposer par la compagnie d'assurance dans sa police pour que l'espérance du remboursement soit égale à 36% de l'espérance de la perte.

A) 500 B) 400 C) 300 D) 250 E) 200

$\boxed{8}$ Soit X la variable aléatoire perte de fonction de densité $f_X(x), x \geq 0$. Si la police rembourse la perte jusqu'à un maximum de 1 000, laquelle des expressions suivantes donne l'espérance du remboursement ?

A) $\displaystyle\int_0^{1\,000} x f_X(x)dx$ B) $\displaystyle\int_0^{1\,000} x f_X(x)dx + \int_{1\,000}^{\infty} 1\,000 f_X(x)dx$ C) $\displaystyle\int_0^{\infty} x f_X(x)dx$

D) $\max(1\,000,\ E[X])$ E) $\displaystyle\int_{1\,000}^{\infty} (x - 1\,000) f_X(x)dx$

$\boxed{9}$ Une compagnie d'assurance automobile divise ses assurés en 2 groupes, à savoir : les bons conducteurs et les mauvais conducteurs. Pour les bons conducteurs, la réclamation moyenne vaut 1 400 avec un écart-type de 200. Pour les mauvais conducteurs, la réclamation moyenne est de 2 000 avec un écart-type de 500. De plus 60% des assurés sont de bons conducteurs. Trouver la variance du montant de la réclamation d'un assuré pris au hasard.

A) 124 000 B) 145 000 C) 166 000 D) 210 400 E) 235 000

$\boxed{10}$ Une police d'assurance va payer 5 000 si un appareil tombe en panne la $1^{\text{ère}}$ année et ce bénéfice va diminuer chaque année de 1 000 jusqu'à zéro. Si l'appareil n'est pas encore tombé en panne au début d'une année, il a toujours une probabilité de 0.4 de tomber en panne durant cette année. Trouver l'espérance du bénéfice.

A) 3 417 B) 3 617 C) 3 817 D) 4 017 E) 4 217

$\boxed{11}$ Pour un conducteur automobile, les accidents automobiles peuvent résulter en des sinistres annuels de 0, 1 000, 5 000, 10 000 ou 15 000 avec des probabilités de 0.75, 0.12, 0.08, 0.04, et 0.01, respectivement. Un assureur automobile offre une police qui assure les conducteurs automobiles contre ces sinistres sujette à un déductible annuel de 500. L'assureur charge une prime annuelle qui excède les sinistres annuels attendus par 75 pour couvrir ses dépenses et son profit. Calculer la prime annuelle chargée par l'assureur.

A) 1 345 B) 1 295 C) 1 245 D) 1 195 E) 1 145

$\boxed{12}$ Une police d'assurance rembourse un maximum de trois réclamations durant une année. S'il y a une seule réclamation, son montant est uniformément distribué entre 50 et 450. S'il y a deux (resp. trois) réclamations, le montant total des deux (resp. trois) réclamations est uniforme entre 250 et 1 000 (resp. entre 500 et 2 000). Si les probabilités de $0, 1, 2, 3$ réclamations sont $0.4, 0.3, 0.2$ et 0.1, trouver la probabilité que l'assureur doive payer plus de 500\$ en réclamations totales durant l'année.

A) 0.300 B) 0.233 C) 0.333 D) 0.125 E) 0.225

$\boxed{13}$ Cette année la perte est uniforme entre 0 et 1 000, et la compagnie applique un déductible de 100\$. Si l'année prochaine la perte sera plutôt uniforme entre 0 et 1 050 et la compagnie maintient le déductible à 100\$, de quel pourcentage le remboursement espéré va-t-il augmenter ?

A) 5% B) 5.6% C) 6.1% D) 2.5% E) 2.8%

$\boxed{14}$ L'année dernière la distribution (discrète) aléatoire des pertes était donnée par le tableau ci-bas et de plus, il y avait un déductible de 150 et un paiement maximum de 300. Cette année, on estime qu'à cause de l'inflation les pertes vont toutes augmenter de 30%. Calculer le paiement espéré si on garde le plafond de 300 mais qu'on augmente aussi de 30% le déductible.

Tableau	
Perte	Probabilité
0	0.4
100	0.1
200	0.1
300	0.2
400	0.1
500	0.05
600	0.05

A) 109.7 B) 107.6 C) 105.5 D) 103.4 E) 101.3

$\boxed{15}$ Soit N le nombre de réclamations durant l'année pour une police d'assurance prise au hasard. On sait que $p_N(0) = 0.9$, $p_N(1) = 0.06$ et $p_N(2) = 0.04$. De plus, le montant de toute réclamation suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1\,000]$, indépendamment de toute autre réclamation. Trouver $P(S > 750)$ où S est le montant total des réclamations de la police.

A) 4.4% B) 3.9% C) 3.2% D) 2.6% E) 1.5%

$\boxed{16}$ La perte X d'un assuré est une variable aléatoire discrète dont la distribution est :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p_X(x)$	0.05	0.06	0.25	0.22	0.10	0.05	0.05	0.05	0.05	0.12

Trouver le déductible d que l'on doit imposer pour que l'espérance du remboursement soit la moitié de l'espérance de la perte.

A) 2 B) 2.25 C) 2.5 D) 2.75 E) 3

$\boxed{17}$ La perte est uniforme sur l'intervalle $[0, 1\,000]$. Une première police rembourse 80% de la perte, soit R_1 le remboursement de cette police. Une seconde police rembourse la perte jusqu'à un maximum de $M < 1\,000$, soit R_2 le remboursement de cette police.

Trouver $\mathrm{Var}[R_2] \big/ \mathrm{Var}[R_1]$ sachant que $E[R_1] = E[R_2]$.

A) 0.31 B) 0.62 C) 0.93 D) 1.24 E) 1.52

$\boxed{18}$ Une police d'assurance paie pour une perte aléatoire qui est sujet à un déductible d, où $0 < d < 1$. Le montant de la perte est modélisé par une variable aléatoire continue X de fonction de densité $f_X(x) = 2x$ pour $0 \leq x \leq 1$ et $f_X(x) = 0$ sinon.

Trouver d sachant que la probabilité d'un remboursement plus petit que 0.5 est 0.64.

A) 0.2 B) 0.3 C) 0.4 D) 0.5 E) 0.6

$\boxed{19}$ Une compagnie d'assurance vend des polices au Nouveau-Brunswick et en Nouvelle-Écosse. Les statistiques indiquent :

(i) 20% des gens du Nouveau-Brunswick ou de Nouvelle-Écosse n'ont fait aucune réclamation ;

(ii) 15% des gens du Nouveau-Brunswick n'ont fait aucune réclamation ;

(iii) 40% des gens de Nouvelle-Écosse n'ont fait aucune réclamation.

Étant donné qu'un détenteur choisi au hasard n'a pas déposé de réclamation, trouver la probabilité qu'il habite au Nouveau-Brunswick.

A) 0.09 B) 0.27 C) 0.50 D) 0.60 E) 0.80

$\boxed{20}$ Une compagnie perçoit une prime annuelle égale à la somme d'un frais fixe par police et d'une charge additionnelle proportionnelle au montant assuré. La prime annuelle pour police assurant 100 000 (respectivement 200 000) est 500 (respectivement 700). Trouver la prime annuelle pour une police assurant 350 000.

A) 1 300 B) 1 200 C) 1 100 D) 1 000 E) 900

$\boxed{21}$ Un assureur offre deux polices pour couvrir la perte X dont la fonction de densité est :

$$f_X(x) = \begin{cases} x/18 & \text{pour } 0 < x < 6 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour la police I, il n'y a pas de déductible mais un maximum de 4. Pour la police II, il y a un déductible de 2 mais pas de maximum. Calculer $\dfrac{E[R_1]}{E[R_2]}$ où R_1 et R_2 sont les remboursements aléatoires pour les deux polices.

A) $\dfrac{19}{14}$ B) $\dfrac{3}{2}$ C) $\dfrac{23}{14}$ D) $\dfrac{25}{14}$ E) $\dfrac{27}{14}$

$\boxed{22}$ Un couple contracte une police d'assurance médicale qui les rembourse pour les journées de travail perdues pour cause de maladie. La police paie une prestation mensuelle de 100 pour chaque jour de travail perdu par la femme ou par l'homme durant le mois, sujet à un maximum de 500. En supposant que X, le nombre de jours perdus par la femme et Y, le nombre de jours perdus par l'homme, sont des variables aléatoires indépendantes et uniformes discrètes sur l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, trouver la prestation mensuelle moyenne qui sera payée au couple.

A) 194.44 B) 300 C) 402.78 D) 411.11 E) 600

$\boxed{23}$ La perte X suit une loi uniforme sur l'intervalle [0, 1 500].
Le remboursement R est sujet à un maximum m. Si $E[R] = 630$ alors que vaut m ?

A) 500 B) 600 C) 800 D) 900 E) 1 200

$\boxed{24}$ La perte X suit une loi uniforme sur l'intervalle [0, 20]. Le remboursement est sujet à un déductible de 1 et à un maximum (ou plafond) de 15. Trouver la variance du remboursement.

A) 26.86 B) 25.32 C) 23.37 D) 22.32 E) 20.04

$\boxed{25}$ Une compagnie d'assurance a présentement 600 clients. Elle prévoie une baisse de 20% par année pour l'avenir. Si $P = 100\$$ est la prime annuelle de chaque client, trouver le total « ad infinitum » de toutes les primes de tous les clients présents et futurs.

A) 600 000 B) 500 000 C) 450 000 D) 400 000 E) 300 000

$\boxed{26}$ Cette année la perte est uniforme entre 0 et 1 000, et la compagnie applique un déductible de 100$. Si l'année prochaine la perte sera uniforme entre 0 et 1 200 et la compagnie maintient le déductible à 100$ de quel pourcentage le remboursement espéré va-t-il augmenter ?

A) 12.5% B) 16.5% C) 20.5% D) 24.5% E) 28.5%

$\boxed{27}$ Une compagnie d'assurance modélise le montant de la perte lors d'un accident par la variable aléatoire continue X uniforme sur l'intervalle $[0, 5\,000]$. Il y a un déductible de 1000. Trouver l'espérance du remboursement si un maximum de 3 000 est imposé sur le remboursement.

A) 1 200 B) 1 300 C) 1 500 D) 1 700 E) 2 000

$\boxed{28}$ Soit$X$ la perte subie par un assuré. On suppose que X est une variable aléatoire continue dont la fonction de densité est :

$$f_X(x) = \begin{cases} k(x^2 - 3x + 500) & \text{si } 0 < x < 20 \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

La police d'assurance comprend un déductible de 2. Trouver la probabilité qu'un remboursement soit supérieur à 4 sachant qu'il est supérieur à 2.

A) 79.86% B) 84.86% C) 89.86% D) 94.86% E) 99.86%

$\boxed{29}$ Une police d'assurance rembourse les frais de soins dentaires jusqu'à un maximum de 300$. Le coût aléatoire des soins dentaires suit une loi continue de fonction de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} ke^{-0.01x} & \text{pour } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver l'espérance du remboursement.

A) 83$ B) 86$ C) 89$ D) 92$ E) 95$

$\boxed{30}$ La perte X d'un assuré est uniformément distribuée sur l'intervalle [0, 5 000]. Trouver le montant D du déductible à imposer par la compagnie d'assurance dans sa police pour que l'espérance du remboursement soit égale à 36% de l'espérance de la perte.

A) 2 500 B) 2 000 C) 1 200 D) 1 000 E) 800

$\boxed{31}$ La perte X suit une loi continue uniforme sur l'intervalle [0, 20 000]. Le remboursement est sujet à un déductible de 1 000 et un maximum (ou plafond) de 15 000. Trouver la médiane du remboursement.

A) 5 000 B) 7 500 C) 12 000 D) 10 000 E) 9 000