

ACTUARIAT 1, ACT 2121, AUTOMNE 2013 #11

ARTHUR CHARPENTIER

- 1] Considérons le tableau suivant donnant les probabilités des valeurs  $(x, y)$  de deux variables aléatoires discrètes  $X$  et  $Y$  :

		$X$			
		2	3	4	5
	0	0.05	0.05	0.15	0.05
$Y$	1	0.40	0	0	0
	2	0.05	0.15	0.10	0

Trouver  $\text{Cov}(X, Y)$ .

- A) 2.85      B) 2.70      C) 0.95      D)  $-0.15$       E)  $-0.20$

- 2] Soit  $X$  le coût aléatoire des réparations de l'auto lors d'un accident et  $Y$  le coût des soins médicaux. Si au cours des 5

dernières années le coût des réparations a augmenté 15% et

le coût des soins médicaux de 25%, de quel pourcentage la

covariance de  $X$  et  $Y$  a-t-elle variée ?

- A) 20%      B) 40%      C) 33.33%      D) 43.75%      E) 51.80%

- 3] Soit  $X$  et  $Y$  des variables aléatoires de variances 2 et 3 respectivement, et de covariance  $-1$ . Laquelle des variables aléatoires suivantes a la plus petite variance ?

A)  $4X$       B)  $3X - Y$       C)  $3Y$       D)  $2X + Y$       E)  $2X - Y$

- 4] Les variables aléatoires  $X_1, X_2, X_3$  sont uniformes sur l'intervalle  $[0, 1]$  avec  $\text{Cov}(X_i, X_j) = \frac{1}{24}$  pour  $i = 1, 2, 3$  et  $i \neq j$ . Calculer  $\text{Var}[X_1 + 2X_2 - X_3]$ .

A)  $\frac{5}{12}$       B)  $\frac{11}{12}$       C)  $\frac{1}{2}$       D)  $\frac{1}{4}$       E)  $\frac{1}{6}$

- 5] Considérons le tableau suivant donnant les probabilités des valeurs  $(x, y)$  de deux variables aléatoires discrètes  $X$  et  $Y$  :

		$X$			
		2	3	4	5
	0	0.05	0.05	0.15	0.05
$Y$	1	0.40	0	0	0
	2	0.05	0.15	0.10	0

Trouver  $\rho_{X,Y}$ , le coefficient de corrélation de  $X$  et  $Y$ .

A) 0.228      B) 0.201      C) 0      D)  $-0.201$       E)  $-0.228$

6]  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires telles que :

$$(i) \text{Var}[X] = \text{Var}[Y] \quad (ii) \text{Var}[X + Y] = 10 \quad (iii) \text{Var}[X - 2Y] = 16$$

Calculer  $\text{Cov}(X, Y)$ .

A)  $-1$       B)  $-2$       C)  $1$       D)  $2$       E)  $0$

7] Soit  $X$  le coût aléatoire des réparations de l'auto lors d'un accident et  $Y$  le coût des soins médicaux. Si au cours des 5 dernières années le coût des réparations a augmenté de 25% et le coût des soins médicaux a diminué de 5%, de quel pourcentage la covariance de  $X$  et  $Y$  a-t-elle variée ?

A) 15.25%      B) 18.75%      C) 20%      D) 30%      E) 22.45%

8] Une assurance va rembourser 100% des dépenses médicales  $X$  et 80% des coûts de réparation de l'auto  $Y$  en cas d'accident. En supposant  $E[X] = 10\,000$ ,  $E[Y] = 3\,000$ ,  $\sigma_X = 4\,000$ ,  $\sigma_Y = 1\,500$ , trouver le coefficient de variation (c'est-à-dire le quotient de l'écart-type par l'espérance) du remboursement total, sachant que  $\text{Cov}(X, Y) = 500\,000$ .

A) 0.217      B) 0.256      C) 0.344      D) 0.476      E) 0.714

- 9 On suppose que les durées de vie future  $X$  et  $Y$  de deux conjoints suivent des lois exponentielles indépendantes de même moyenne  $m$ . Deux polices d'assurance sont offertes : l'une paie au premier décès et l'autre au dernier décès. Trouver la covariance entre les deux temps de paiement.

A)  $m^2$       B)  $\frac{m^2}{2}$       C)  $\frac{m^2}{3}$       D)  $\frac{m^2}{4}$       E) 0

- 10 Soit  $X$  et  $Y$  des variables aléatoires indépendantes telles que  $E[X] = 5$ ,  $E[Y] = 20$  et  $E[\min(X, Y)] = 4$ . Calculer  $\text{Cov}(\min(X, Y), \max(X, Y))$ .

A) 16      B) 8      C) 4      D) 0      E) -2

- 11  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires telles que :

(i)  $\text{Var}[X] = \text{Var}[Y]$       (ii)  $\text{Var}[X + Y] = 10$       (iii)  $\text{Var}[X - 3Y] = 18$

Calculer  $\text{Cov}(X, Y)$ .

A) -1      B) -2      C) 1      D) 2      E) 0

- 12 Soit  $X$  le coût aléatoire des réparations de l'auto lors d'un accident et  $Y$  le coût des soins médicaux. Si au cours des 5 dernières années le coût des réparations a augmenté de 30% et le coût des soins médicaux a augmenté de 10%, de quel pourcentage la covariance de  $X$  et  $Y$  a-t-elle variée ?

A) 20%      B) 30%      C) 40%      D) 43%      E) 45%

13 Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires dépendantes dont le coefficient de corrélation  $\rho_{X,Y}$  vaut 0.8. Une étude révèle que  $\text{Var}[X] = 25$  et  $\text{Var}[Y] = 9$ . Calculer  $\text{Var}[2X + 3Y]$ .

- A) 253      B) 295      C) 325      D) 395      E) 453

14 Les variables aléatoires  $X_1, X_2, X_3$  sont uniformes sur l'intervalle  $[0, 1]$  avec  $\text{Cov}(X_i, X_j) = \frac{1}{24}$  pour  $i = 1, 2, 3$  et  $i \neq j$ . Calculer  $\text{Var}[X_1 + 2X_2 + 3X_3]$ .

- A)  $\frac{1}{2}$       B)  $\frac{2}{3}$       C)  $\frac{25}{12}$       D)  $\frac{17}{24}$       E)  $\frac{7}{6}$

15 Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes telles que  $P(X = 0, Y = 2) = \frac{3}{10}$ ,  $P(X = 1, Y = 1) = \frac{3}{5}$  et  $P(X = 2, Y = 0) = \frac{1}{10}$ . Trouver le coefficient de corrélation,  $\rho_{X,Y}$ , entre  $X$  et  $Y$ .

- A)  $-1$       B)  $-0.873$       C)  $0$       D)  $0.873$       E)  $1$

16 Supposons que les nombres aléatoires d'accidents durant l'année à venir pour un couple sont  $X = 0, 1$  ou  $2$ , pour la femme, et  $Y = 1$  ou  $2$ , pour l'homme. Si la distribution conjointe est  $p(x, y) = \frac{x+y}{15}$  pour  $x = 0, 1, 2$  et  $y = 1, 2$ , trouver le coefficient de corrélation  $\rho_{X,Y}$ , de  $X$  et  $Y$ .

- A)  $-0.027$       B)  $0.027$       C)  $-0.071$       D)  $0.071$       E)  $0$

- 17 Soit le tableau suivant donnant les probabilités des valeurs  $(x, y)$  de deux variables aléatoires discrètes  $X$  et  $Y$ . Trouver  $\text{Cov}(X, Y)$ , la covariance de  $X$  et  $Y$ .

		$X$			
		2	3	4	5
$Y$	0	0.05	0.05	0.15	0.05
	1	0.40	0	0	0
	2	0.05	0.15	0.10	0

- A)  $-0.15$       B)  $-0.08$       C)  $0$       D)  $0.08$       E)  $0.15$

- 18 Dans une urne il y a trois boules numérotées 1, 2, 3. On pige au hasard, sans remplacement, une première boule puis une seconde. Soit  $X$  le numéro sur la première boule et  $Y$  le numéro sur la seconde. Trouver  $\text{Cov}(X, Y)$ , la covariance de  $X$  et  $Y$ .

- A)  $-\frac{1}{3}$       B)  $-\frac{1}{2}$       C)  $0$       D)  $\frac{1}{2}$       E)  $\frac{1}{3}$