ACTUARIAT 1, ACT 2121, AUTOMNE 2013 #10

ARTHUR CHARPENTIER

$\boxed{1}$ Soit X la variable aléatoire dont la série génératrice des moments est $M_X(t) = \dfrac{1}{1+t}$. Trouver $E[(X-2)^3]$.

A) $\dfrac{1}{3}$ B) $\dfrac{2}{3}$ C) $\dfrac{3}{2}$ D) -38 E) $\dfrac{-19}{3}$

$\boxed{2}$ Supposons que la série génératrice des moments de X soit $M_X(t) = e^{at}/(1-bt^2)$. Si $E[X]=3$ et $\text{Var}[X]=2$ alors que vaut $a+b$?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

$\boxed{3}$ Soit $F_X(x) = 1 - e^{-x}/2$ pour $x \geq 0$ et $F_X(x) = 0$ pour $x < 0$. Trouver la série génératrice des moments $M_X(t)$ de X.

A) $\dfrac{1}{1-t}$ B) $\dfrac{1}{2-2t}$ C) $\dfrac{2-t}{2-2t}$ D) $\dfrac{1}{2t} + \dfrac{1}{2(1+t)}$ E) n'existe pas

$\boxed{4}$ Sachant que $M_X(t) = e^{3t}/(1-t^2)$, trouver $E[X]$ et $\text{Var}[X]$.

A) 1 et 2 B) 1 et 3 C) 3 et 2 D) 3 et 3 E) 3 et 6

$\boxed{5}$ Soit Y la variable aléatoire discrète "résultat lorsqu'on lance un dé à six faces". Trouver la série génératrice des moments $M_Y(t)$.

A) $\dfrac{e^{6t}-1}{6(e^t-1)}$ B) $\dfrac{e^{7t}-e^t}{6t}$ C) $\dfrac{t^7-t}{6}$ D) $\dfrac{e^{7t}-e^t}{6(e^t-1)}$ E) $\dfrac{e^{6t}-1}{6t}$

$\boxed{6}$ Soit $M_X(t) = 1 + 2t + 3t^2 + 4t^3 + \ldots$ la série génératrice des moments de la variable aléatoire X. Trouver la variance de X.

A) 4 B) 6 C) 2 D) -1 E) 3

$\boxed{7}$ Si $f_X(x) = (k+1)x^2$ pour $0 < x < 1$. Trouver $M_X(t)$.

A) $e^t(6+6t+3t^2)/t^3$ B) $e^t(6-6t+3t^2)/t^3$ C) $e^t(6+6t+3t^2)/t^3 - \dfrac{6}{t^3}$

D) $e^t(6+6t+3t^2)/t^3 + \dfrac{6}{t^3}$ E) $e^t(6-6t+3t^2)/t^3 - \dfrac{6}{t^3}$

$\boxed{8}$ On lance deux boules dans 4 trous. Soit X le nombre de trous vides. Trouver $M_X(t)$, la série génératrice des moments de la variable aléatoire X. (On suppose qu'une boule a une chance sur quatre de tomber dans chacun des 4 trous et que les deux boules peuvent tomber dans le même trou).

A) $\dfrac{1}{2}e^{3t} + 3e^{t/4}$ B) $\dfrac{1}{4}e^{2t}(1+3e^t)$ C) e^{2t} D) $\dfrac{1}{4}(3+e^t)$ E) $\dfrac{1}{4}e^{2t}(3+e^t)$

$\boxed{9}$ Soit $M_X(t) = 1 + 2^2t + 3^2t^2 + 4^2t^3 + \ldots$ la série génératrice des moments d'une variable aléatoire X. Trouver la variance de X.

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 9

$\boxed{10}$ Soit U, V, W les variables aléatoires donnant la perte pour trois assurés (indépendants). Trouver $E[X^3]$, où X est la perte aléatoire totale des trois assurés, sachant que :
$M_U(t) = (1-2t)^{-3}$, $M_V(t) = \sqrt{1-2t} \cdot M_U(t)$ et $M_W(t) = \sqrt{1-2t} \cdot (M_V(t))^2$.

A) 10 560 B) 8 400 C) 5 700 D) 3 020 E) 1 360

$\boxed{11}$ Soit X et Y des variables aléatoires dont la série génératrice conjointe des moments est :

$$M_{X,Y}(t,s) = E[e^{tX+sY}] = \left(\frac{1}{4}e^t + \frac{3}{8}e^s + \frac{3}{8}\right)^{10}.$$

Trouver $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

A) $-\dfrac{15}{16}$ B) $-\dfrac{135}{16}$ C) 0 D) $\dfrac{135}{16}$ E) $\dfrac{15}{16}$

$\boxed{12}$ Soit X, Y et Z trois variables aléatoires indépendantes dont la distribution discrète de probabilités est la même, soit $p(x) = \dfrac{1}{3}$ pour $x = 0$ et $p(x) = \dfrac{2}{3}$ pour $x = 1$.

Trouver la série génératrice des moments de $U = X^2Y^2Z^2$.

A) $\dfrac{8e^t + 19}{27}$ B) $2e^t + 1$ C) $\dfrac{(1+2e^t)^3}{27}$ D) $\dfrac{1+2e^{3t}}{3}$ E) $\dfrac{8e^{3t}}{3}$

$\boxed{13}$ Une compagnie d'assurance détermine que le nombre N de réclamations durant une semaine est tel que $P(N=n)=\frac{1}{2^{n+1}}, n\geq 0$. Trouver la série génératrice des moments du nombre d'accidents durant 3 semaines consécutives (on suppose l'indépendance d'une semaine à l'autre).

A) $3(2-e^t)^{-3}$ B) $(2-e^t)^{-2}$ C) $(2-e^t)^{-3}$ D) $(2-e^t)^{-1}$ E) $(1-e^t)^{-3}$

$\boxed{14}$ Soit X une variable aléatoire de type exponentielle de moyenne m et Y une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle $[0,m]$.
En supposant X et Y indépendantes, trouver la série génératrice des moments de $X+Y$.

A) $\dfrac{e^{mt}-1}{1-m^2t^2}$ B) $\dfrac{e^{mt}-1}{mt(1-mt)}$ C) $\dfrac{e^{mt}}{mt-m^2t^2}$ D) $\dfrac{e^{mt}}{1-mt}$ E) $\dfrac{1-mt}{e^{mt}}$

$\boxed{15}$ Si la série génératrice des moments de la variable aléatoire X est $M_X(t)=\left(\frac{2+e^t}{3}\right)^9$, trouver la variance de X.

A) 2 B) 3 C) 8 D) 9 E) 11

$\boxed{16}$ Supposons que la série génératrice des moments de X est donnée par :

$$M_X(t)=a+bt+ct^2+\cdots$$

Si $E[X]=3$ et $\text{Var}[X]=12$, trouver la valeur de $a+b+c$.

A) 5.5 B) 10 C) 14.5 D) 25 E) information insuffisante

$\boxed{17}$ Soit X une variable aléatoire dont la série génératrice des moments est $M_X(t) = e^{3t}(1-t^2)^{-1}$. Trouver $\sigma_X/E[X]$.

A) 0.125 B) 0.333 C) 0.471 D) 0.500 E) 0.667

$\boxed{18}$ Calculer $P(X=6)$ pour la variable aléatoire X ayant la fonction (ou série) génératrice des moments $M_X(t) = \left(\frac{e^t}{3-2e^t}\right)^4$.

A) $\dfrac{20}{243}$ B) $\dfrac{40}{729}$ C) $\dfrac{20}{81}$ D) $\dfrac{80}{243}$ E) $\dfrac{160}{729}$

$\boxed{19}$ Soit X une variable aléatoire telle que :

$$M_X(t) = ((0.7) + (0.3)e^t)^6.$$

Trouver $P(X \geq 5)$.

A) 0.01 B) 0.03 C) 0.07 D) 0.30 E) 0.70

$\boxed{20}$ Trouver la série génératrice de moments de la variable aléatoire continue X dont la fonction de densité est $f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ pour $-\infty < x < \infty$.

A) $\dfrac{t}{1+t^2}$ B) $\dfrac{t}{1-t^2}$ C) $\dfrac{1}{1-t}$ D) $\dfrac{1}{1-t^2}$ E) $\dfrac{1}{1+t^2}$

$\boxed{21}$ Soit X et Y des variables aléatoires dont les séries génératrices des moments sont $M_X(t) = 3(3-t)^{-1}$ et $M_Y(t) = (4 - 3M_X(t))^{-1}$. Trouver $E[Y]$.

A) 2 B) 1.5 C) 1.4 D) 1.2 E) 1

$\boxed{22}$ Soit $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$ des variables aléatoires indépendantes de même loi. En supposant que $M_Y(t) = e^{18e^t - 18}$ où $Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$, trouver la variance de X_3.

A) 324 B) $\sqrt{18}$ C) 18 D) 3 E) $\sqrt{3}$

$\boxed{23}$ Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $M_X(t) = e^{t^2+2t}$ et $M_Y(t) = e^{3t^2+t}$. Trouver la série génératrice des moments de $3X + Y$.

A) e^{12t^2+7t} B) $3e^{4t^2+3t}$ C) $3e^{t^2+2t} + e^{3t^2+t}$ D) $e^{9t^2+6t} + e^{3t^2+t}$ E) e^{6t^2+7t}

$\boxed{24}$ Soit X une variable aléatoire dont la série génératrice des moments est :

$$M_X(t) = 0.1 + (0.2)e^t + (0.2)e^{2t} + (0.3)e^{3t} + (0.1)e^{5t} + (0.1)e^{7t}.$$

Trouver $P(X < 6 \mid X > 2)$.

A) 0.45 B) 0.55 C) 0.80 D) 0.90 E) 0.65

$\boxed{25}$ Soit X la perte sur une police d'assurance. Supposons que X suit une loi exponentielle de moyenne μ. Si l'assurance ne rembourse que $R = (0.75)X$, trouver la série génératrice des moments, $M_R(t)$, de R.

A) $\dfrac{3}{3-4\mu t}$ B) $\dfrac{4}{3-3\mu t}$ C) $\dfrac{3}{4-3\mu t}$ D) $\dfrac{4}{4-3\mu t}$ E) $\dfrac{1}{1-\mu t}$

$\boxed{26}$ Une compagnie d'assurance détermine que le nombre N de réclamations durant une semaine est tel que $P(N = n) = \frac{2}{3^{n+1}}, n \geq 0$. Trouver la série génératrice des moments du nombre d'accidents durant 3 semaines consécutives (on suppose l'indépendance d'une semaine à l'autre).

A) $3(2-e^t)^{-3}$ B) $\left(\frac{2}{3}+\frac{e^t}{3}\right)^3$ C) $8(3-e^t)^{-3}$ D) $2(3-e^t)^{-3}$ E) $(2-e^t)^{-3}$

$\boxed{27}$ Soit X une variable aléatoire dont la série génératrice des moments est :

$$M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{nt-1}}{n!}$$

Trouver $P(X = 2)$.

A) e^{-2} B) $\dfrac{1}{3}$ C) e^{-1} D) $\dfrac{1}{2}$ E) $\dfrac{1}{2}e^{-1}$

$\boxed{28}$ Soit X une variable aléatoire telle que $M_X(t) = \dfrac{1}{1-2t}$. Trouver $P(X > 2)$.

A) $\dfrac{1}{2}$ B) e^{-1} C) $1-e^{-1}$ D) $1-e^{-2}$ E) e^{-2}

$\boxed{29}$ Soit X une variable aléatoire telle que :

$$M_X(t) = \frac{1}{5}\left(e^{-2t} + e^{-t} + 1 + e^{t} + e^{2t}\right).$$

Trouver $P(X \geq 0 \mid X \neq 1 \text{ ou} - 1)$.

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{2}{3}$